

Capítulo 8

Transformada Z

La bibliografía para el estudio de este tema es:

- el Capítulos 3, “Z Transform” y
- el Capítulo 5, “Transform Analysis of Time-Invariant Systems”

del libro de Oppenheim, A., Schafer, R., *Discrete-Time Signal Processing*, 2da. Edición, Prentice-Hall, Inc., 1998.

8.1 Idea de la demostración del Teorema de Cauchy

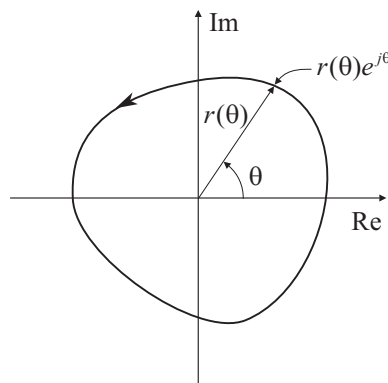


Fig. 8.1: Contorno de integración para la Ec. 8.1.

Se desea probar que

$$\oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k \neq 1, \end{cases} \quad (8.1)$$

donde C es un contorno cerrado que rodea al origen y orientado en sentido antihorario (Fig. 8.1). Es conveniente introducir el cambio de variables $z = r(\theta) e^{j\theta}$ parametrizando el contorno C en función del ángulo θ . Es evidente que

$$\begin{aligned} dz &= \left[\frac{dr(\theta)}{d\theta} e^{j\theta} + r(\theta) \frac{de^{j\theta}}{d\theta} \right] d\theta \\ &= r'(\theta) e^{j\theta} d\theta + j r(\theta) e^{j\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Para $k = 1$, el integrando es

$$\begin{aligned} z^{-k} dz &= z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{r(\theta) e^{j\theta}} \left[r'(\theta) e^{j\theta} + j r(\theta) e^{j\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} d\theta + j d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \oint_C z^{-1} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} d\theta + \int_0^{2\pi} j d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} [\ln r(\theta)] d\theta + \int_0^{2\pi} j d\theta \\ &= \ln r(\theta) \Big|_0^{2\pi} + j\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi j \end{aligned} \tag{8.2}$$

pues $r(0) = r(2\pi)$, y además $r(\theta) \neq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ pues el contorno de integración rodea al origen.

Para el caso en que $k = m \geq 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} z^{-m} dz &= \frac{1}{r^m(\theta) e^{jm\theta}} \left[r'(\theta) e^{j\theta} + j r(\theta) e^{j\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{m-1} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{r^{m-1}(\theta) e^{j(m-1)\theta}} \right] d\theta \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \oint_C z^{-m} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{m-1} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{r^{m-1}(\theta) e^{j(m-1)\theta}} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{m-1} \frac{1}{r^m(\theta) e^{jm\theta}} \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Finalmente, si $k = -p \leq 0$ (es decir, $p \geq 0$), resulta

$$\begin{aligned} z^{-m} dz &= z^p dz = r^p(\theta) e^{jp\theta} \left[r'(\theta) e^{j\theta} + j r(\theta) e^{j\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{p+1} \frac{d}{d\theta} \left[r^{(p+1)}(\theta) e^{j(p+1)\theta} \right] d\theta, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \oint_C z^{-k} dz &= \oint_C z^p dz \\ &= \oint_C \frac{1}{p+1} \frac{d}{d\theta} \left[r^{(p+1)}(\theta) e^{j(p+1)\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{p+1} \left[r^{(p+1)}(\theta) e^{j(p+1)\theta} \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{8.4}$$

De (8.2)-(8.4) queda probado (8.1).

8.2 Ejemplos de aplicación de la transformada \mathcal{Z}

8.2.1 Propiedad de convolución

EJEMPLO 8.1 Cálculo de la convolución entre dos sucesiones

Se debe calcular la convolución entre la sucesión $x[n] = a^n u[n]$, donde se supone que $|a| < 1$, y la sucesión $h[n] = u[-n - 1]$. En este ejemplo se exploran dos alternativas:

- **Cálculo de la convolución por definición:** Si $y[n] = x[n] * h[n]$, como $x[n]$ es causal y $h[n]$ es no causal se encuentra que

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k], & \text{si } n < 0, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} x[k]h[n-k], & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Entonces, para $n < 0$ se tiene que

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Por otra parte, si $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=n+1}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n+1}^{\infty} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k - \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Por lo tanto,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & \text{si } n < 0, \\ \frac{a^{n+1}}{1-a}, & \text{si } n \geq 0. \end{cases} \quad (8.5)$$

- **Cálculo de la convolución aplicando la transformada \mathcal{Z}**

En general, es mucho más sencillo antitransformar el producto de las transformadas \mathcal{Z} de las sucesiones que efectuar el cálculo de la convolución por definición. en este caso,

$$\begin{aligned} x[n] = a^n u[n] & \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|, \\ h[n] = u[-n-1] & \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = \frac{(-1)}{1-z^{-1}}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Como $|a| < 1$, las regiones de convergencia de $X(z)$ y de $Y(z)$ se solapan en $|a| < |z| < 1$, y entonces se puede definir

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \times \frac{(-1)}{1-z^{-1}}, \quad \text{para } |a| < |z| < 1.$$

Expresando $Y(z)$ en fracciones parciales,

$$Y(z) = \frac{A_0}{1-az^{-1}} + \frac{A_1}{1-z^{-1}},$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= Y(z)(1-az^{-1}) \Big|_{z=a} = \frac{(-1)}{1-z^{-1}} \Big|_{z=a} = \frac{-1}{1-a^{-1}} = \frac{a}{1-a}, \\ A_1 &= Y(z)(1-z^{-1}) \Big|_{z=1} = \frac{(-1)}{1-az^{-1}} \Big|_{z=1} = \frac{-1}{1-a}. \end{aligned}$$

	sucesión	transformada	región de convergencia
1.	$\delta[n]$	1	todo el plano z
2.	$\delta[n - m]$	z^{-m}	todo z salvo 0 (si $m > 0$) o ∞ (si $m < 0$)
3.	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
4.	$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
5.	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6.	$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
13.	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
14.	$\text{sen}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\text{sen} \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
15.	$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
16.	$r^n \text{sen}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \text{sen} \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
17.	$\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Tabla 8.1: Algunos pares de transformadas \mathcal{Z} (consultar la Sección 8.7 para una tabla más completa).

Por lo tanto,

$$Y(z) = \left(\frac{a}{1-a} \right) \frac{1}{1-az^{-1}} + \left(\frac{-1}{1-a} \right) \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ para } |a| < |z| < 1.$$

Para el polo en $z = a$, la región de convergencia es el exterior de un círculo, y por lo tanto la antitransformada corresponde a una sucesión derecha. Para el polo en $z = 1$ la región de convergencia es el interior de un círculo, y en consecuencia se asocia a una sucesión izquierda. En definitiva,

$$y[n] = \left(\frac{a}{1-a} \right) a^n u[n] + \frac{1}{1-a} u[-n-1],$$

que, evidentemente, coincide con la convolución calculada por definición en (8.5). \square

8.3 Cálculos de transformadas inversas

Una de las principales aplicaciones de la transformada \mathcal{Z} es en el análisis de sistemas lineales discretos. Frecuentemente este análisis involucra el encontrar transformadas \mathcal{Z}

de las sucesiones, y luego de alguna manipulación de las expresiones algebraicas, calcular la transformada \mathcal{Z} inversa. Existen varias maneras, formales e informales, de calcular la transformada inversa dada una expresión algebraica y su región de convergencia. El procedimiento formal se basa en la integral de Cauchy (Churchill y Brown, 1990). Sin embargo, para los tipos de sucesiones y transformadas \mathcal{Z} que se encuentran en el análisis de sistemas discretos lineales e invariantes al desplazamiento, bastan (y en general, son preferibles) métodos menos formales. En las siguientes secciones se presentan algunos de ellos: el método de inspección, el de fracciones parciales, y el de la expansión en series de potencia

8.3.1 Método de inspección

El método de inspección consiste en familiarizarse con ciertos pares transformados, y tratar de reorganizar la expresión de la transformada \mathcal{Z} para ponerlos en evidencia. Por ejemplo, en la Sección XX se evaluaron las transformadas \mathcal{Z} de sucesiones de la forma $x[n] = a^n u[n]$, donde a puede ser real o complejo. Las sucesiones de este tipo aparecen frecuentemente, y por ellos es particularmente útil recordar el par transformado

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (8.6)$$

Si se necesita encontrar la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (8.7)$$

y se recuerda el par transformado indicado en (8.6), se puede reconocer “por inspección” que la sucesión asociada es $x[n] = (1/2)^n u[n]$. Si la región de convergencia asociada a $X(z)$ en la ecuación (8.7) hubiese sido $|z| < 1/2$, el par transformado número 6 de la Tabla 8.1 indica que $x[n] = -(1/2)^n u[-n - 1]$.

Las tablas de transformadas \mathcal{Z} , como la Tabla 8.1, son de gran ayuda cuando se aplica el método de inspección. Si la tabla es extensa, es posible expresar la transformada \mathcal{Z} a invertir como una suma de términos cuya inversa figure en la tabla.

8.3.2 Expansión en fracciones parciales

Como se mencionó más arriba, las transformadas inversas se pueden calcular por inspección si se reconocen expresiones características, o si se cuenta con una tabla donde figure la transformada \mathcal{Z} que se quiere antitransformar. Algunas veces $X(z)$ puede no figurar explícitamente en la tabla, pero puede obtenerse una forma alternativa como una suma de términos simples, cada uno de los cuales está tabulado. Este es el caso de cualquier función racional, ya que se puede obtener una expansión en fracciones parciales e identificar fácilmente las sucesiones asociadas a los términos individuales.

Para obtener una expansión en fracciones parciales, se supone que $X(z)$ está expresada como un cociente de polinomios en z^{-1}

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (8.8)$$

Este tipo de transformadas aparecen frecuentemente en el estudio de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. Una expresión equivalente es

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}. \quad (8.9)$$

La ecuación (8.9) muestra explícitamente que para tales funciones habrá M ceros y N polos en el plano z , que no están ubicados en el origen. Además, habrá $M - N$ polos en $z = 0$ si $M > N$ o $N - M$ ceros en $z = 0$ si $N > M$. En otras palabras, las transformadas \mathcal{Z} de expresiones de la forma (8.8) siempre tienen la misma cantidad de polos y ceros en el plano \mathcal{Z} , y no hay polos o ceros en $z = \infty$.

Para obtener la expansión en fracciones parciales de la expresión de $X(z)$ en la ecuación (8.8) es más conveniente notar que $X(z)$ también puede expresarse como

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}, \quad (8.10)$$

donde los c_k , p_k son los ceros y polos no nulos, respectivamente, de $X(z)$. Si $M < N$, y los polos son de primer orden, entonces $X(z)$ puede escribirse como

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}. \quad (8.11)$$

Evidentemente, el denominador común de las fracciones en (8.11) es el mismo denominador de la ecuación (8.10). Multiplicando ambos miembros de (8.11) por $(1 - p_k z^{-1})$ y evaluando en $z = p_k$ se encuentra que los coeficientes A_k pueden calcularse como

$$A_k = X(z)(1 - p_k z^{-1}) \Big|_{z=p_k}. \quad (8.12)$$

EJEMPLO 8.2 Transformada \mathcal{Z} de segundo orden

Sea $x[n]$ una sucesión con transformada \mathcal{Z}

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

El diagrama de polos y ceros de $X(z)$ se representa en la Fig. 8.2: la transformada tiene un par de ceros en el origen, y polos en $z_1 = 1/4$ y en $z_2 = 1/2$, como se pone en evidencia al escribir $X(z)$ en la forma de la ecuación (8.9)

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

De la forma de la región de convergencia y de la Propiedad NN de la Sección XX se deduce que $x[n]$ es una sucesión derecha. Como los polos son de primer orden, $X(z)$ se puede expresar en la forma de la ecuación (8.11)

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}.$$

De la ecuación (8.12),

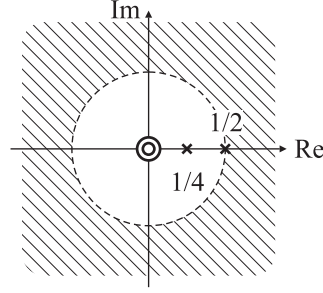


Fig. 8.2: Diagrama de polos y ceros y región de convergencia para la transformada \mathcal{Z} del Ejemplo 8.2.

$$A_1 = X(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-1})\Big|_{z=1/4} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}\Big|_{z=1/4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = -1,$$

$$A_2 = X(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=1/2} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}\Big|_{z=1/2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 2.$$

Por lo tanto,

$$X(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Como la sucesión es derecha, la región de convergencia de cada término se extiende por fuera del polo de mayor módulo. De la Tabla 8.1 y de la linealidad de la transformada \mathcal{Z} se tiene que

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \quad \square$$

El numerador que resultaría de sumar los términos de la ecuación (8.11) resultaría a lo sumo de grado $N - 1$ en la variable z^{-1} . Si $M \geq N$, entonces debe agregarse un polinomio de orden $M - N$ (en z^{-1}) al miembro de la derecha de la ecuación (8.11). Entonces, para $M \geq N$, la expansión en fracciones parciales de $X(z)$ toma la forma

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}. \quad (8.13)$$

Si $X(z)$ es una función racional de la forma (8.8) con $M \geq N$, los términos B_r de la expresión (8.13) se calculan efectuando la división entre el numerador y el denominador de $X(z)$, concluyendo el proceso de la división cuando el grado del resto (en z^{-1}) es menor que el grado del denominador. Los A_k se siguen calculando con la ecuación (8.12).

Si $X(z)$ tiene polos múltiples y $M \geq N$, la ecuación (8.13) debe modificarse; en particular si $X(z)$ tiene un polo de orden s en $z = p_i$ y todos los demás polos son de primer orden, la forma corregida de la ecuación (8.13) es

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - p_i z^{-1})^m}. \quad (8.14)$$

Los coeficientes A_k y B_r se calculan como se indicó anteriormente, y los coeficientes C_m se calculan a partir de la siguiente expresión:

$$C_m = \frac{1}{(s - m)!(-p_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} [(1 - p_i w)^s X(w^{-1})] \right\} \Big|_{w=p_i^{-1}}. \quad (8.15)$$

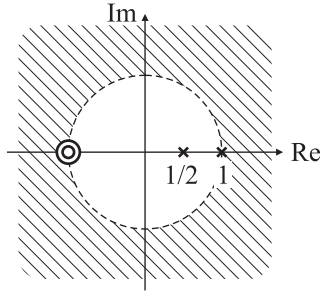


Fig. 8.3: Diagrama de polos y ceros y región de convergencia del Ejemplo 8.3.

La ecuación (8.14) es la forma más general de la expresión de expansión en fracciones parciales de una transformada \mathcal{Z} racional expresada como función de z^{-1} para $M \geq N$ y para un polo p_i de orden s . Si ocurren varios polos múltiples, aparecerán términos como la tercera sumatoria de (8.14) por cada uno de ellos. Si no hay polos múltiples, (8.14) se reduce a (8.13). Si el orden del numerador es menor que el del denominador ($M < N$) el término polinomial desaparece de las ecuaciones (8.13) y (8.14).

Resta determinar cuál es la sucesión correspondiente a una transformada \mathcal{Z} racional dada. A tal fin se supone que $X(z)$ tiene sólo polos de primer orden, de manera que la ecuación (8.13) es la forma general de la expansión en fracciones parciales. Para calcular $x[n]$ se aprovecha la linealidad de la transformada \mathcal{Z} , de manera que se puede calcular la transformada inversa de cada término individual y luego sumarlos algebraicamente.

Los términos $B_r z^{-r}$ corresponden a impulsos escalados y desplazados, esto es, términos de la forma $B_r \delta[n - r]$. Cada una de las fracciones parciales corresponden a sucesiones exponenciales. Para decidir si un término de la forma

$$\frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

corresponde a una sucesión $p_k^n u[n]$ o $-p_k^n u[-n - 1]$, se deben observar las propiedades de la región de convergencia que fueron discutidas en la Sección XX. Se observa entonces que si $X(z)$ tiene sólo polos simples, y la región de convergencia es de la forma $r_d < |z| < r_i$, entonces un polo p_k corresponde a una sucesión exponencial derecha $p_k^n u[n]$ si $|p_k| < r_d$, y corresponde a una sucesión exponencial izquierda $-p_k^n u[-n - 1]$ si $|p_k| > r_i$. La región de convergencia sirve para clasificar los polos; los polos múltiples también pueden dividirse según contribuyan a sucesiones izquierdas o derechas de la misma manera. El empleo de la región de convergencia en el cálculo de las transformadas \mathcal{Z} inversas a partir de la expansión en fracciones parciales se ilustra con los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8.3 Transformada inversa usando fracciones parciales

En este ejemplo, la transformada \mathcal{Z} tiene la forma indicada en la ecuación (8.13):

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1. \quad (8.16)$$

El diagrama de polos y ceros se representa en la Fig. 8.3. De la región de convergencia y de la Propiedad 5, de la Sección XX, es evidente que $x[n]$ es una sucesión derecha. Como el numerador y el denominador de la función transferencia son del mismo orden en z^{-1} (con $M = N = 2$), y todos los polos son de primer orden, se puede expresar $X(z)$ como

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - z^{-1})}.$$

La constante B_0 se encuentra efectuando la división:

$$\frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 1}{z^{-2} - 3z^{-1} + 2} \left| \frac{\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1}{2} \right.$$

$$\frac{\phantom{z^{-2} + 2z^{-1} + 1}}{5z^{-1} - 1}$$

El cálculo no se continúa porque el resto es un grado menor (en la variable z^{-1}) que el divisor. De modo que $X(z)$ se puede expresar como

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (8.17)$$

Los coeficientes A_1 y A_2 pueden encontrarse aplicando la ecuación (8.12) a las expresiones (8.16) o (8.17) indistintamente. Utilizando (8.16) se obtiene

$$A_1 = X(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z=1/2} = \left[2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right] (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z=1/2} = -9,$$

$$A_2 = X(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = \left[2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right] (1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = 8.$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 2 + \frac{-9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}.$$

De la Tabla 8.1 se encuentra que, como la región de convergencia es $|z| > 1$,

$$2 \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} 2\delta[n]$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} u[n].$$

Por la linealidad de la transformada \mathcal{Z} ,

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n] \quad \square$$

EJEMPLO 8.4 Cálculo de antitransformadas

Se debe calcular $x[n]$ sabiendo que

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Como el numerador y el denominador de la función de sistema tienen el mismo orden en $z - 1$ se debe calcular el cociente:

$$\frac{\frac{1}{4}z^{-2} - z^{-1} + 1}{\frac{1}{4}z^{-2} - \frac{5}{4}z^{-1} + 1} \left| \frac{\frac{1}{4}z^{-2} - \frac{5}{4}z^{-1} + 1}{1} \right.$$

$$\frac{\phantom{\frac{1}{4}z^{-2} - z^{-1} + 1}}{\frac{1}{4}z^{-1} + 0}$$

de modo que

$$X(z) = 1 + \underbrace{\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}}_{\hat{X}(z)} = 1 + \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - z^{-1})}. \quad (8.18)$$

Los coeficientes A_1 y A_2 se calculan por residuos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{X}(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-1}) \Big|_{z=1/4} = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1 - z^{-1})} \Big|_{z=1/4} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{4})^{-1}} = -\frac{1}{3}, \\ A_2 &= \tilde{X}(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \Big|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Los residuos A_1, A_2 de $\tilde{X}(z)$ son los mismos que los de $X(z)$, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-1}) \Big|_{z=1/4} = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})} \Big|_{z=1/4} = \frac{(1 - 2)^2}{1 - (\frac{1}{4})^{-1}} = -\frac{1}{3}, \\ A_2 &= X(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \Big|_{z=1} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1 - z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1, \quad (8.19)$$

y de tablas se encuentra que

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{1}{3}u[-n - 1]. \quad (8.20)$$

Observación: Cuando el numerador y el denominador de la función de sistema tienen el mismo orden, es *imprescindible* efectuar el cociente entre el numerador y el denominador de $X(z)$. En caso contrario, no se obtiene el término "1" en la ecuación (8.18), y al descomponer $X(z)$ en fracciones parciales se tiene

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1 - z^{-1})} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \tilde{X}(z).$$

Vale decir que no se está la antitransformada de la función dada. \square

Los mismos resultados puede obtenerse si la expresión racional $X(z)$ se expresa como un cociente de polinomios en z en lugar de z^{-1} . En este caso, el lugar de factores de la forma $(1 - az^{-1})$ se hubieran considerado factores del tipo $(z - a)$, lo que hubiera conducido a un conjunto de ecuaciones similares a las (8.13)-(8.15) que serían convenientes para utilizar con una tabla de transformadas \mathcal{Z} expresadas en función de z y no de z^{-1} . Ya que la Tabla 8.1 está expresada en función de z^{-1} , este enfoque es más útil. De todas maneras, estas alternativas se exploran en los Ejemplos 8.5 y 8.6.

EJEMPLO 8.5 Antitransformando expresiones en "z"

La sucesión $x[n]$ también puede obtenerse a partir de $X(z)$ trabajando con polinomios en z y no en z^{-1} . En este caso,

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{z^2 - z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - \frac{1}{4})(z - 1)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Nuevamente, como el numerador y el denominador de $X(z)$ tienen el mismo orden, es necesario calcular el cociente:

$$\frac{z^2 - z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}} \Big|_{\frac{1}{4}z + 0} \quad \frac{z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}}{1}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 1 + \underbrace{\frac{\frac{1}{4}z}{(z - \frac{1}{4})(z - 1)}}_{\tilde{X}(z)} = 1 + \frac{A_1}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{A_2}{(z - 1)},$$

donde los residuos A_1, A_2 se pueden calcular a partir de $\tilde{X}(z)$, como

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{X}(z)(z - \frac{1}{4}) \Big|_{z=1/4} = \frac{\frac{1}{4}z}{z - 1} \Big|_{z=1/4} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{12}, \\ A_2 &= \tilde{X}(z)(z - 1) \Big|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}z}{z - \frac{1}{4}} \Big|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

o bien usando $X(z)$, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(z - \frac{1}{4}) \Big|_{z=1/4} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - 1)} \Big|_{z=1/4} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{12}, \\ A_2 &= X(z)(z - 1) \Big|_{z=1} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - \frac{1}{4})} \Big|_{z=1} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De modo que

$$X(z) = 1 - \frac{1}{12} \frac{1}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{1}{3} \frac{1}{(z - 1)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1. \quad (8.21)$$

El problema ahora está en antitransformar $X(z)$, ya que los pares transformados que se conocen son

$$\begin{aligned} x[n] = a^n u[n] &\quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|, \\ h[n] = -a^n u[-n - 1] &\quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|. \end{aligned}$$

y al compara con (8.21) se observa que al menos falta una "z" en el numerador. Esto se puede solucionar multiplicando numerador y denominador por z^{-1} para obtener

$$X(z) = 1 - \frac{1}{12} \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1. \quad (8.22)$$

Esta expresión se puede antitransformar fácilmente haciendo uso de la propiedad de desplazamiento: $x[n - n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$. Nuevamente, para el polo en $z = 1/4$ la región de convergencia es el exterior de un círculo, y la respuesta temporal está asociada a una sucesión derecha:

$$\frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n - 1].$$

Para el polo en $z = 1$, la región de convergencia es el interior de un círculo, y la respuesta temporal está asociada a una sucesión izquierda

$$\frac{1}{(1 - z^{-1})}, \quad |z| < 1 \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -u[-n - 1].$$

Pero hay que prestar especial atención al desplazamiento, pues $z^{-1}/(1 - z^{-1})$ equivale a desplazar la sucesión temporal una muestra *hacia la derecha* (es decir, reemplazar n por $n - 1$):

$$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})}, \quad |z| < 1 \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -u[-(n - 1) - 1] = -u[-n].$$

Por lo tanto, la antitransformada de (8.22) resulta

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n - 1] - \frac{1}{3} u[-n]. \quad (8.23)$$

La comparación de las ecuaciones (8.20) y (8.23) muestra que la expresión matemática de $x[n]$ es distinta; sin embargo los valores numéricos de ambas sucesiones son iguales. Operando con los términos de (8.23), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1] &= \frac{1}{3}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}\delta[n], \\ \frac{1}{3}u[-n] &= \frac{1}{3}\delta[n] + \frac{1}{3}u[-n-1].\end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en (8.23) se encuentra que

$$\begin{aligned}x[n] &= \delta[n] - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1] - \frac{1}{3}u[-n] \\ &= \delta[n] - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}\delta[n]\right) - \left(\frac{1}{3}\delta[n] + \frac{1}{3}u[-n-1]\right) \\ &= \delta[n] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}u[-n-1],\end{aligned}$$

que coincide con la ecuación (8.20). \square

EJEMPLO 8.6 Otra manera de antitransformar expresiones en “z”

Para evitar confusiones en el corrimiento hacia la derecha de las sucesiones izquierdas, cuando $X(z)$ se expresa como un cociente de polinomios en z y no en z^{-1} , es conveniente expresar en fracciones parciales la función $X(z)/z$. Aunque de esta forma es necesario calcular un residuo más porque se adiciona un polo en el origen, en general se evita hacer el cociente y se simplifica el cálculo posterior, como se muestra a continuación. Utilizando la misma transformada \mathcal{Z} de los ejemplos previos,

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - \frac{1}{4})(z - 1)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1,$$

se tiene que

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{z(z - \frac{1}{4})(z - 1)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{4}} + \frac{A_3}{z - 1}.$$

Los residuos son

$$\begin{aligned}A_1 &= \left. \frac{X(z)}{z} z \right|_{z=0} = \left. \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - \frac{1}{4})(z - 1)} \right|_{z=0} = \frac{(-\frac{1}{2})^2}{(-\frac{1}{4})(-1)} = 1, \\ A_2 &= \left. \frac{X(z)}{z} (z - \frac{1}{4}) \right|_{z=1/4} = \left. \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{z(z - 1)} \right|_{z=1/4} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4})} = -\frac{1}{3}, \\ A_3 &= \left. \frac{X(z)}{z} (z - 1) \right|_{z=1} = \left. \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{z(z - \frac{1}{4})} \right|_{z=1} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{1(1 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z} - \frac{\frac{1}{3}}{z - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}}{z - 1}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Multiplicando ambos miembros por z , resulta

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 1}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1,$$

que también puede escribirse como

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Esta transformada \mathcal{Z} coincide con la expresión (8.19) del Ejemplo 8.4, y la antitransformada es directa teniendo en cuenta la forma de la región de convergencia para cada uno de los polos. Se tiene entonces que

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}u[-n-1], \quad (8.24)$$

que coincide con las sucesiones calculadas en los Ejemplos 8.4 y 8.5. \square

EJEMPLO 8.7 Una cuarta forma de calcular la transformada \mathcal{Z} inversa

Si la transformada \mathcal{Z} tiene una expresión sencilla, la aplicación de propiedades puede simplificar el cálculo de las sucesiones, aunque frecuentemente resultan expresiones no tan compactas de $x[n]$ como las obtenidas en los Ejemplos 8.4 a 8.6. Partiendo de la misma transformada \mathcal{Z} que en los ejemplos anteriores, pero expresada como cociente de polinomios en z^{-1} ,

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1,$$

se puede escribir

$$X(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2 X_1(z) = (1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}) X_1(z), \quad (8.25)$$

donde

$$X_1(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Esta transformada auxiliar se puede expresar en fracciones parciales (se omiten los cálculos por brevedad) como

$$X_1(z) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1,$$

cuya antitransformada es

$$x_1[n] = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{4}{3}u[-n - 1].$$

Con esta sucesión, y teniendo en cuenta de la ecuación (8.25) que

$$x[n] = x_1[n] - x_1[n - 1] + \frac{1}{4}x_1[n - 2],$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} x[n] &= \left\{ -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{4}{3}u[-n - 1] \right\} \\ &\quad - \left\{ -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1} u[n - 1] - \frac{4}{3}u[-(n - 1) - 1] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-2} u[n - 2] - \frac{4}{3}u[-(n - 2) - 1] \right\}. \\ &= -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{4}{3}u[-n - 1] + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1} u[n - 1] + \frac{4}{3}u[-n] \\ &\quad - \frac{1}{12}(\frac{1}{4})^{n-2} u[n - 2] - \frac{1}{3}u[-n + 1] \end{aligned} \quad (8.26)$$

Esta expresión es más complicada que las expresiones (8.20), (8.23) y (8.24) obtenidas en los Ejemplos 8.4 a 8.6, respectivamente, pero puede simplificarse notando que el tercer término se puede escribir como

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1} u[n - 1] = \frac{1}{3}\delta[n - 1] + \frac{1}{12}(\frac{1}{4})^{n-2} u[n - 2],$$

y por lo tanto la suma del primer, tercer y quinto término queda

$$-\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1} u[n - 1] - \frac{1}{12}(\frac{1}{4})^{n-2} u[n - 2] = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{1}{3}\delta[n - 1] \quad (8.27)$$

El segundo, el cuarto y el último término pueden escribirse como

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}u[-n - 1] + \frac{4}{3}u[-n] - \frac{1}{3}u[-n + 1] &= \frac{4}{3}(-u[-n - 1] + u[-n]) - \frac{1}{3}u[-n + 1] \\ &= \frac{4}{3}\delta[n] - \frac{1}{3}u[-n + 1] \\ &= \frac{4}{3}\delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n - 1] - \frac{1}{3}u[-n - 1] \\ &= \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n - 1] - \frac{1}{3}u[-n - 1]. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (8.27) y (8.28), la expresión (8.26) resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\delta[n-1]\right) + \left(\delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1] - \frac{1}{3}u[-n-1]\right) \\ &= \delta[n] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}u[-n-1], \end{aligned}$$

que coincide con las expresiones (8.20), (8.23) y (8.24) de los Ejemplos previos. \square

En la Sección ?? se discutirán e ilustrarán una serie de propiedades de la transformada \mathcal{Z} que, en combinación con el método de las fracciones parciales permiten determinar la sucesión asociada a una función racional algebraica en z y su región de convergencia aún cuando $X(z)$ no esté dada exactamente en la forma indicada en la ecuación (8.10).

Antitransformada de expresiones con polos complejos conjugados

De acuerdo a la expresión (8.13), la transformada \mathcal{Z} de una sucesión que al menos tenga un par de polos complejos conjugados, por ejemplo en $z = p = \rho e^{j\theta}$ y en $z = p^* = \rho e^{-j\theta}$, puede expresarse como

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=2}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_0}{1 - pz^{-1}} + \frac{A_1}{1 - p^* z^{-1}}$$

donde los dos últimos términos representan las fracciones parciales correspondientes a los polos complejos conjugados. En lo que sigue se muestra que $A_1 = A_0^*$. Para simplificar la notación es conveniente expresar $X(z)$ como

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{\tilde{Q}(z)} \frac{1}{(1 - pz^{-1})(1 - p^* z^{-1})}.$$

donde $P(z)$, $Q(z)$ y $\tilde{Q}(z)$ son polinomios con coeficientes reales. Por lo tanto, según el cálculo de residuos,

$$\begin{aligned} A_0 &= X(z)(1 - pz^{-1})\big|_{z=p} = \frac{P(p)}{\tilde{Q}(p)} \frac{1}{(1 - p^* p^{-1})}, \\ A_1 &= X(z)(1 - pz^{-1})\big|_{z=p^*} = \frac{P(p^*)}{\tilde{Q}(p^*)} \frac{1}{[1 - p(p^*)^{-1}]} = \left[\frac{P(p)}{\tilde{Q}(p)}\right]^* \frac{1}{[1 - (p^* p^{-1})^*]} = A_0^*. \end{aligned}$$

ya que $P(p^*) = [P(p)]^*$, $\tilde{Q}(p^*) = [\tilde{Q}(p)]^*$ porque tienen coeficientes reales.

La transformada del par de polos complejos conjugados se puede escribir entonces como

$$\frac{A}{1 - pz^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^* z^{-1}} = \frac{A - Ap^* z^{-1} + A^* - A^* p z^{-1}}{1 - (p + p^*)z^{-1} + pp^* z^{-2}} = \frac{2 \operatorname{Re}\{A\} - 2 \operatorname{Re}\{Ap^*\}z^{-1}}{1 - 2 \operatorname{Re}\{p\}z^{-1} + |p|^2 z^{-2}}. \quad (8.29)$$

Por otra parte, si $A = \alpha e^{j\phi}$, y $p = \rho e^{j\theta}$, la antitransformada para una región de convergencia $|z| > |p|$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} Ap^n u[n] + a^*(p^*)^n u[n] &= \alpha e^{j\phi} (\rho e^{j\theta})^n u[n] + \alpha e^{-j\phi} (\rho e^{-j\theta})^n u[n] \\ &= \alpha \rho^n [e^{j(n\theta+\phi)} + e^{-j(n\theta+\phi)}] u[n] \\ &= 2\alpha \rho^n \cos(\theta n + \phi) u[n]. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Por lo tanto, de acuerdo a las expresiones (8.29) y (8.30) se puede establecer el par transformado

$$2\alpha\rho^n \cos(\theta n + \phi)u[n] \iff 2\alpha \frac{\cos\phi - \rho \cos(\phi - \theta)z^{-1}}{1 - 2\rho \cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}, \quad |z| > \rho. \quad (8.31)$$

La aplicación de este par transformado se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8.8 Antitransformada de polos complejos conjugados

Se desea calcular la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}. \quad (8.32)$$

Esta función tiene un par de ceros en el origen, y un par de polos complejos conjugados en

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}e^{\pm j\pi/6} = \frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4},$$

de manera que $\rho = 1/2$, $\theta = \pi/6$. Por lo tanto, $X(z)$ puede escribirse como

$$X(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/6}z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}z^{-1}},$$

donde A , A^* se calculan aplicando residuos:

$$A = X(z)(1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/6}z^{-1}) \Big|_{z=\frac{1}{2}e^{j\pi/6}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{2}e^{j\pi/6}} = \frac{1}{1 - e^{-j\pi/3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1e^{-j\pi/3}$$

de modo que $\alpha = 1$, $\phi = -\pi/3$. Aplicando (8.30) se encuentra que

$$x[n] = 2\alpha\rho^n \cos(\theta n + \phi)u[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{3}\right)u[n]. \quad (8.33)$$

La expresión (8.32) también se puede antitransformar sin calcular residuos, comparándola con (8.31). En este caso, como en el numerador de (8.32) no aparece z^{-1} , y $\rho \neq 0$, debe ser $\cos(\phi - \theta) = 0$, de donde

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

esto es, $\phi = \frac{2}{3}\pi + \pi k$. El numerador de (8.31) es $2\alpha \cos\phi$, y el de (8.32) es la unidad, de modo que $2\alpha \cos\phi = 1$ de donde

$$\alpha = \frac{1}{2 \cos\phi}.$$

Como $\alpha \geq 0$ (porque es el módulo del residuo A) se debe elegir un valor de $\phi = \frac{2}{3}\pi + \pi k$ compatible, esto es, tal que $\cos\phi \geq 0$, lo que ocurre para k impar. Para $k = 1$, $\phi = 5\pi/6$, y entonces $\cos\phi = 1/2$, de donde $\alpha = 1$. Finalmente, de la expresión (8.31) se encuentra que

$$x[n] = 2\alpha\rho^n \cos(\theta n + \phi)u[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{5\pi}{6}\right)u[n]. \quad (8.34)$$

Aunque las expresiones (8.33) y (8.34) son matemáticamente diferentes, representan la misma sucesión temporal porque el ángulo $(-\pi/3)$ es congruente con $5\pi/3$. \square

EJEMPLO 8.9 Antitransformada de una expresión con polos complejos conjugados

Se desea calcular la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}}{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1} + \left(\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-2} - \frac{1}{3}z^{-3}} = \frac{(1 + z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{9}{4}z^{-2})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

Esta expresión tiene ceros en $c_{1,2} = \pm j$ y $c_3 = -1/4$, y polos en $z_{1,2} = \frac{3}{2}e^{\pm j\pi/4}$ y en $z_3 = 1/3$, de modo que también puede escribirse como

$$X(z) = \frac{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - jz^{-1})(1 + jz^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}.$$

Como el numerador y el denominador tienen igual orden, para calcular la antitransformada es necesario efectuar el cociente entre ambos. Se encuentra que

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{3} + (\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{2}}{2})z^{-1} + (\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{6})z^{-2}}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

que puede escribirse como

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{A_0}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})} + \frac{A_1}{(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Los coeficientes A_0 , $A_1 = A_0^*$ y A_2 se calculan por residuos:

$$A_0 = X(z)(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1}) \Big|_{z=\frac{3}{2}e^{j\pi/4}} = \frac{-3}{2132} \left[(212 + 203\sqrt{2}) - j(514 + 105\sqrt{2}) \right] = \sqrt{\frac{873}{1066} + \frac{66\sqrt{2}}{164}} e^{j\beta}$$

$$A_1 = A_0^*,$$

$$A_2 = X(z)(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{70}{85 - 18\sqrt{2}}$$

donde $\beta = -\tan^{-1}[(514 + 105\sqrt{2})/(212 + 203\sqrt{2})]$. Expresiones aproximadas para los residuos son

$$\begin{aligned} A_0 &\approx -0.702278 - j0.932213 \approx 1.16714e^{-j2.21643}, \\ A_1 &\approx -0.702278 + j0.932213 \approx 1.16714e^{+j2.21643}, \\ A_2 &\approx 1.1756, \end{aligned}$$

con $\alpha = 1.16714$ y $\phi = -2.21643$. Por lo tanto,

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{1.16714e^{-j2.21643}}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})} + \frac{1.16714e^{j2.21643}}{(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})} + \frac{1.1756}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Las posibles regiones de convergencia y las antitransformadas correspondientes son

- Para $|z| < 1$,

$$x[n] = -\frac{1}{3}\delta[n] - 2 \times 1.16714 \times (\frac{3}{2})^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.21643)u[-n - 1] - 1.1756(\frac{1}{3})^n u[-n - 1]$$

- Para $1 < |z| < 3/2$,

$$x[n] = -\frac{1}{3}\delta[n] - 2 \times 1.16714 \times (\frac{3}{2})^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.21643)u[-n - 1] + 1.1756(\frac{1}{3})^n u[n]$$

- Para $\frac{3}{2} < |z|$,

$$x[n] = -\frac{1}{3}\delta[n] + 2 \times 1.16714 \times (\frac{3}{2})^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.21643)u[n] + 1.1756(\frac{1}{3})^n u[n] \quad \square$$

8.3.3 Expansión en series de potencias

La expresión que define la transformada \mathcal{Z} es una serie de Laurent donde cada uno de los elementos de la sucesión de valores $x[n]$ son los coeficientes de z^{-n} . De modo que si la transformada \mathcal{Z} se da como una serie de potencia en la forma

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-2} + x[2]z^{-2} + \cdots, \end{aligned} \quad (8.35)$$

se puede determinar cualquier valor de la sucesión encontrando el coeficiente de la potencia apropiada de z^{-1} . Esta aproximación es la misma que se aplicó al calcular la transformada inversa de la parte polinomial en la expresión en fracciones parciales cuando $M \geq N$. También es útil para sucesiones de longitud finita donde $X(z)$ puede no tener una forma cerrada más sencilla que un polinomio en z^{-1} .

EJEMPLO 8.10 Sucesiones de longitud finita

Si $X(z)$ está dada por

$$\begin{aligned} X(z) &= z^2(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) \\ &= \frac{z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2}}{z} \end{aligned} \quad (8.36)$$

se observa que tiene un único polo en $z = 0$, de modo que no resulta práctica la expansión en fracciones parciales de la Sección 8.3.2. Sin embargo, multiplicando los factores de la ecuación (8.36) se puede expresar $X(z)$ como

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}.$$

Por inspección, teniendo en cuenta (8.35), se desprende que

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = -2, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } n = -1, \\ -1, & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

o bien

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]. \quad \square$$

Cuando se busca la transformada \mathcal{Z} de una sucesión se trata de sumar la serie de potencias de la ecuación (8.35) para obtener una expresión matemática más sencilla, en general una función racional. Si se desea usar la técnica de la serie de potencias para encontrar la sucesión asociada a una dada $X(z)$ expresada en forma cerrada, primero es necesario expandir $X(z)$ nuevamente en una serie de potencias. Existen tablas de series de potencias para muchas funciones, tales como logaritmo, seno, seno hiperbólico, etc. En algunos casos tales series de potencia pueden tener una interpretación útil como transformadas \mathcal{Z} , como se muestra en el siguiente ejemplo. En el caso de transformadas \mathcal{Z} racionales la expresión en serie de potencias se puede obtener calculando la “división larga”, como en los Ejemplos 8.12 y 8.13

EJEMPLO 8.11 Transformada inversa por expansión en series de potencias

Aunque en general no serán de aplicación en este curso, es posible calcular las antitransformadas de funciones no racionales en z . Por ejemplo, si

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|,$$

se puede conocer la sucesión $x[n]$ correspondiente expresando $X(z)$ en serie de potencias. Teniendo en cuenta que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

resulta

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n z^{-n},$$

manera siguiente:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \hline
 1 - a^{-1}z \\
 0 + a^{-1}z \\
 \hline
 + a^{-1}z - a^{-2}z^2 \\
 \hline
 + a^{-2}z^2 \\
 \hline
 + a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 \\
 \hline
 + a^{-3}z^3 \\
 \hline
 \vdots
 \end{array}
 \qquad
 \left| \begin{array}{l}
 -az^{-1} + 1 \\
 \hline
 -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \dots
 \end{array} \right.$$

Es evidente que

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \dots$$

si $|z| < |a|$. Nuevamente, comparando con la expresión general de la transformada \mathcal{Z} se observa que

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_n x[n]z^{-n} \\
 &= \dots + \underbrace{x[-3]}_{\downarrow -a^{-3}} z^3 + \underbrace{x[-2]}_{\downarrow -a^{-3}} z^2 + \underbrace{x[-1]}_{\downarrow -a^{-1}} z + \underbrace{x[0]}_{\downarrow 0} z^0 + \underbrace{x[1]}_{\downarrow 0} z^{-1} + \underbrace{x[2]}_{\downarrow 0} z^{-2} + \dots
 \end{aligned}$$

de donde se deduce la forma general $x[n] = -a^n u[-n - 1]$. □

Este procedimiento no es útil para transformadas muy complicadas, pero puede dar una pista para encontrar la forma general de la solución, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8.14 Transformada inversa de una sucesión derecha

Se desea calcular la sucesión derecha asociada a la transformada \mathcal{Z}

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Como se desea encontrar una sucesión derecha, el cociente debe arreglarse como

$$\begin{array}{r}
 1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} \\
 \hline
 1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} \\
 0 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \\
 \hline
 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{10}{9}z^{-2} + \frac{2}{9}z^{-3} \\
 \hline
 0 + \frac{11}{18}z^{-2} - \frac{2}{9}z^{-3} \\
 \hline
 + \frac{11}{18}z^{-2} - \frac{55}{108}z^{-3} + \frac{11}{108}z^{-4} \\
 \hline
 0 + \frac{31}{108}z^{-3} - \frac{11}{108}z^{-4} \\
 \hline
 \vdots
 \end{array}
 \qquad
 \left| \begin{array}{l}
 1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} \\
 \hline
 1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{11}{18}z^{-2} + \frac{31}{108}z^{-3} + \dots
 \end{array} \right.$$

La sucesión $x[n]$ puede escribirse como

$$x[n] = \delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n - 1] + \frac{11}{18}\delta[n - 2] + \frac{31}{108}\delta[n - 3] + \dots \tag{8.37}$$

pero es difícil encontrar un patrón que permita generalizar la sucesión. Utilizando otros métodos, por ejemplo el de fracciones parciales, es más sencillo encontrar la forma general. En este caso, como el numerador y denominador de $X(z)$ tienen el mismo orden, es necesario efectuar el cociente, pero ordenando los coeficientes de manera distinta:

$$\frac{-\frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + 1}{-\frac{1}{3}z^{-2} + \frac{5}{3}z^{-1} - 2} \quad \left| \frac{\frac{1}{6}z^{-2} - \frac{5}{6}z^{-1} + 1}{-2} \right.$$

$$\hline 0 - \frac{7}{6}z^{-1} + 3$$

De modo que $X(z)$ puede escribirse como

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = -2 + \frac{-\frac{7}{6}z^{-1} + 3}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = -2 + \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

donde

$$A_1 = X(z)(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) \Big|_{z=1/3} = \frac{-\frac{7}{6}z^{-1} + 3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=1/3} = \frac{-\frac{7}{6} \cdot 3 + 3}{1 - \frac{1}{2} \cdot 3} = 1,$$

$$A_2 = X(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z=1/2} = \frac{-\frac{7}{6}z^{-1} + 3}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \Big|_{z=1/2} = \frac{-\frac{7}{6} \cdot 2 + 3}{1 - \frac{1}{3} \cdot 2} = 2.$$

Por lo tanto,

$$X(z) = -2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}},$$

y entonces,

$$x[n] = -2\delta[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Se puede verificar que esta expresión coincide con (8.37) dando valores numéricos para $n = 0, 1, \dots$

n	0	1	2	3	...
$x[n]$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{31}{108}$...

En consecuencia, el método de la división larga es conveniente cuando sólo se necesitan conocer unos pocos términos de $x[n]$. \square

Sin embargo, algunas veces el método de la división larga permite poner en evidencia cierta estructura de la sucesión a encontrar que sería difícil de encontrar de otra forma, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.15 Método de división larga en sucesiones particulares

Se desea conocer la transformada inversa de $X(z) = 1/(1 - \frac{1}{2}z^{-3})$, para $|z| > 2^{-1/3}$. En este caso, la expansión en fracciones parciales necesita conocer los residuos de $X(z)$ en las tres raíces de $z^3 = 1/2$, que son $z_k = 2^{-1/3}e^{j\frac{2\pi}{3}k}$, con $k = 0, 1, 2$. Esto es,

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-3}} = \frac{1}{(1 - 2^{-1/3}z^{-1})} \times \frac{1}{(1 - 2^{-1/3}e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})} \times \frac{1}{(1 - 2^{-1/3}e^{j\frac{4\pi}{3}}z^{-1})}.$$

Si bien se puede resolver por residuos, es mucho más sencillo ensayar el método de la división larga:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \hline
 1 - \frac{1}{2}z^{-3} \\
 0 + \frac{1}{2}z^{-3} \\
 \hline
 + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{1}{4}z^{-6} \\
 \hline
 + \frac{1}{4}z^{-6} \\
 \hline
 + \frac{1}{4}z^{-6} - \frac{1}{8}z^{-9} \\
 \hline
 + \frac{1}{8}z^{-9} \\
 \hline
 \vdots
 \end{array}
 \qquad
 \left| \begin{array}{l}
 1 - \frac{1}{2}z^{-3} \\
 \hline
 1 + \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-6} + \frac{1}{8}z^{-9} + \dots
 \end{array} \right.$$

Es evidente que

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-3}} = 1 + \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-6} + \frac{1}{8}z^{-9} + \dots$$

y por lo tanto, la transformada inversa es

$$x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-3] + \frac{1}{4}\delta[n-6] + \frac{1}{8}\delta[n-9] + \dots$$

que puede generalizarse fácilmente a

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/3}, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 3, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En este caso, es mucho más sencillo calcular la transformada inversa utilizando el método de la división larga en lugar de efectuar la expansión en fracciones parciales, al contrario que lo que sucede con el Ejemplo anterior. \square

En la Tabla 8.2 se listan algunas funciones comunes y su expansión en series de potencias.

8.3.4 Transformada inversa usando integración de contorno

En las Secciones 8.3.1 a 8.3.3 se discutieron varias formas de obtener la sucesión asociada a una transformada \mathcal{Z} dada. En esta sección se desarrolla un método formal, que será de interés teórico para obtener dos propiedades adicionales de la transformada \mathcal{Z} : el teorema de convolución compleja y la relación de Parseval.

La expresión formal de la transformada \mathcal{Z} inversa puede obtenerse a partir del teorema integral de Cauchy (Churchill y Brown 1992), que establece

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (8.38)$$

donde C es un contorno cerrado que rodea al origen.

A partir de la definición de la transformada \mathcal{Z} ,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (8.39)$$

	función	serie de potencia	RdC
1.	$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$ z < 1$
2.	$\frac{1}{(1-z)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$	$ z < 1$
3.	$\frac{1}{(1-z)^3}$	$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$	$ z < 1$
4.	$\frac{z}{(1-z)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$	$ z < 1$
5.	$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$	$ z < 1$
6.	$\log(1+z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$ z < 1$
7.	$-\log(1-z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$	$ z < 1$
8.	$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$ z < 1$
9.	$z + (1-z)\log(1-z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^n$	$ z < 1$
10.	e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$	todo el plano z
11.	$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$	todo el plano z
12.	$\sen z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n$	todo el plano z
13.	$\cosh z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$	todo el plano z
14.	$\sinh z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$	todo el plano z
15.	$\arctan z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$	$ z < 1$
16.	$\operatorname{arctanh} z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$	$ z < 1$
17.	$\arcsin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} z^{2n+1}$ $= z + \frac{1}{2} \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{1}{7} z^7 + \dots$	$ z < 1$
18.	$\operatorname{arcsinh} z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} z^{2n+1}$ $= z - \frac{1}{2} \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{1}{7} z^7 + \dots$	$ z < 1$
19.	$\tan z$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n (4^n - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$ $= z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \frac{62}{2835} z^9 + \frac{1382}{155925} z^{11} + \dots$	$ z < \frac{\pi}{2}$
20.	$\tanh z$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (4^n - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$ $= z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 - \frac{17}{315} z^7 + \frac{62}{2835} z^9 - \frac{1382}{155925} z^{11} + \dots$	$ z < \frac{\pi}{2}$

$n!!$ es el producto de todos los enteros (pares o impares) menores que n : $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$, $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1$.

B_n es el n -ésimo número de Bernoulli. Se calcula por recursión $\sum_{j=0}^m \binom{m}{j-1} B_j = 0$ con $B_0 = 1$, y $m > 0$.

Tabla 8.2: Algunas funciones y sus series de potencias.

multiplicando ambos miembros por z^{k-1} e integrando con una integral de contorno donde la curva de integración rodee al origen y esté íntegramente contenida en la región de convergencia de $X(z)$, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} z^{k-1} dz.$$

Intercambiando el orden de la integración y la suma (que es válido siempre que la serie sea convergente, de allí que el contorno de integración debe estar contenido en la RdC) resulta que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-n-1} dz.$$

De acuerdo a la expresión (8.38) $\oint_C z^{k-n-1} dz = 1$ cuando $n = k$, y es nula si $n \neq k$; por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = x[k].$$

De modo que la transformada \mathcal{Z} inversa se puede expresar de manera formal como la integral de contorno

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (8.40)$$

donde C es un contorno cerrado orientado en sentido antihorario contenido en la región de convergencia de $X(z)$ y que rodea al origen. en la derivación de la relación (8.40) no se hizo ninguna hipótesis sobre el signo de k o de n , de modo que dicha expresión vale tanto para n positivos o negativos.

La ecuación (8.40) es la expresión formal de la transformada \mathcal{Z} inversa. Si la región de convergencia incluye el círculo unitario, y éste se toma como contorno de integración, se puede escribir $z = e^{j\omega}$, con ω variando desde $-\pi$ hasta π para recorrer el círculo en sentido antihorario. Se tiene entonces que $dz = j\omega e^{j\omega} d\omega$, y reemplazando en (8.40) resulta

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{z=e^{j\omega}} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega(n-1)} j\omega e^{j\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(z) e^{j\omega n} d\omega,$$

que no es otra cosa que la transformada de Fourier inversa de $X(e^{j\omega})$.

Es frecuente evaluar las integrales de contorno como (8.40) con el teorema de los residuos de Cauchy, que aplicado a la expresión (8.40) resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \\ &= \sum \text{residuos de } X(z) z^{n-1} \text{ en los polos encerrados por } C. \end{aligned} \quad (8.41)$$

La ecuación (8.41) es válida para cualquier transformada $X(z)$, pero el cálculo de los residuos de una transformada \mathcal{Z} que no sea una función racional puede ser difícil. Sin embargo, si $X(z) z^{n-1}$ es una función racional, se puede expresar como

$$X(z) z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - p_k)^s},$$

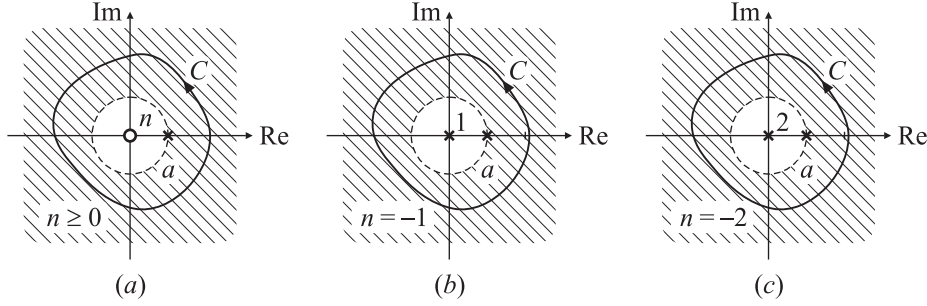


Fig. 8.4: Contornos de integración para la función $X(z)z^{n-1}$ del Ejemplo 8.16: para $n \geq 0$ (a), y para $n = -1$ (b) y $n = -2$ (c).

donde $X(z)z^{n-1}$ tiene s polos en $z = p_k$, y $\psi(z)$ no tiene ningún polo en $z = p_k$. El residuo de $X(z)z^{n-1}$ en $z = p_k$ está dado por

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = p_k\} = \frac{1}{(s-1)!} \left. \frac{d^{s-1}\psi(z)}{dz^{s-1}} \right|_{z=p_k}. \quad (8.42)$$

En particular, si hay un único polo en $z = p_k$ ($s = 1$), la expresión (8.42) se simplifica a

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = p_k\} = \psi(z)|_{z=p_k}. \quad (8.43)$$

Comparando (8.15) con (8.42) es sencillo advertir que encontrar los residuos de $X(z)z^{n-1}$ es similar a calcular los coeficientes para una expansión en fracciones parciales de $X(z)$. En general, para transformadas \mathcal{Z} racionales es más sencillo aplicar el método de las fracciones parciales presentado en la Sección 8.3.2, ya que permite obtener la expresión de $x[n]$ para cualquier valor de n ; en cambio, la expresión formal dada por la ecuación (8.40) permite calcular los valores de $x[n]$ muestra a muestra. En consecuencia la expresión (8.40) resulta de interés para aplicaciones teóricas, como se verá sobre el final del capítulo. De todas maneras, es interesante ilustrar este método utilizando una transformada \mathcal{Z} sencilla.

EJEMPLO 8.16 Transformada inversa por integral de contorno

Como un ejemplo del empleo de la expresión (8.40) se calculará la transformada \mathcal{Z} inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

Aplicando (8.40) se tiene que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - a} dz,$$

donde el contorno de integración está contenido en la región de convergencia $|z| > |a|$, como se muestra en la Fig. 8.4(a). Es evidente en este caso que

$$X(z)z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - p_k)^s} = \frac{z^n}{z - a}.$$

Si $n \geq 0$, $\psi(z) = z^n$, $X(z)z^{n-1}$ sólo tiene un polo en $z = a$, y por lo tanto el contorno encierra sólo un polo. Se tiene entonces que

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} = \psi(z)|_{z=a} = a^n.$$

Por lo tanto,

$$x[n] = a^n, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Si $n < 0$, aparece un polo múltiple en el origen, cuya multiplicidad depende de n , y por lo tanto el cálculo de los residuos se dificulta a medida que $n \rightarrow (-\infty)$. Por ejemplo, para $n = -1$,

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{-2}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z} \frac{1}{z - a} dz$$

de modo que dentro del contorno de integración quedan *dos* polos, uno en $z = a$ y otro en $z = 0$, como se muestra en la Fig. 8.4(b). Por lo tanto,

$$x[-1] = \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\}.$$

Es sencillo calcular que

$$\begin{aligned} \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} &= \left. \frac{1}{z} \frac{1}{z - a} z \right|_{z=0} = -a^{-1}, \\ \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} &= \left. \frac{1}{z} \frac{1}{z - a} (z - a) \right|_{z=a} = a^{-1}, \end{aligned}$$

de modo que $\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} = 0$, y entonces

$$x[-1] = 0.$$

Si $n = -2$,

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{-3}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^2} \frac{1}{z - a} dz,$$

y dentro del contorno de integración quedan *tres* polos: el polo en $z = a$, y un polo *doble* en $z = 0$. Nuevamente,

$$\begin{aligned} x[-2] &= \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}} \left(\frac{1}{z - a} \right) + \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}} \left(\frac{1}{z - a} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{a^2}, \\ \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{z - a} (z - a) \Big|_{z=a} = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x[-2] = \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = 0.$$

La evaluación de $x[n]$ para valores más negativos de n hacen que crezca la multiplicidad del polo en $z = 0$, complicando los cálculos. Aún así se puede encontrar que $x[n] = 0$ para $n < 0$, y en consecuencia,

$$x[n] = a^n u[n],$$

como era de esperar. \square

Mientras que la ecuación (8.40) es válida para todo n , no es cómoda para calcular los valores de $x[n]$ cuando $n < 0$ por la aparición de polos múltiples en el origen. Esto se puede evitar haciendo un cambio de variables, que resulta en una ecuación alternativa que es más fácil de aplicar cuando $n < 0$. Si se hace $z = p^{-1}$, se tiene que $dz = -p^{-2} dp$, y (8.40) toma la forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \Big|_{z=p^{-1}} = \frac{-1}{2\pi j} \oint_{-C'} X(p^{-1})p^{-n+1}p^{-2} dp. \quad (8.44)$$

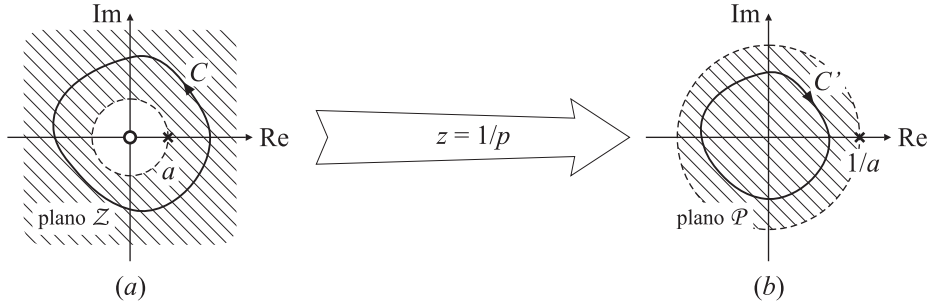


Fig. 8.5: Región de convergencia de $X(z)$ y de $X(1/p)$ para el Ejemplo 8.17.

El cambio de variables introduce modificaciones en la región de convergencia y el contorno de integración. Como $z = p^{-1}$, si el contorno de integración tiene sentido antihorario en el plano z , en el plano p se recorre en sentido horario; por ello se indica el contorno como $-C'$. El sentido de recorrido se puede hacer antihorario nuevamente multiplicando el último término de la expresión (8.44) por (-1) . Además, si el contorno de integración es un círculo de radio r en el plano z , el contorno C' corresponde a un círculo de radio $1/r$ en el plano p . Los polos de $X(z)$ que estaban *fuera* del contorno C quedan *dentro* del contorno C' y viceversa. Algunos polos adicionales pueden o no aparecer en el origen o en infinito, pero no es importante para esta argumentación. En definitiva, multiplicando por (-1) para que el nuevo contorno también sea recorrido en sentido antihorario, la expresión (8.44) se puede escribir como

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} X(1/p)p^{-n-1} dp \\ &= \sum \text{residuos de } X(1/p)p^{-n-1} \text{ en los polos encerrados por } C'. \end{aligned} \quad (8.45)$$

La utilidad de esta expresión se aprecia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.17 Transformada inversa por integral de contorno para $n < 0$

Para calcular la antitransformada de la función racional $X(z)$ del ejemplo anterior, primero es necesario efectuar el cambio de variables $z = p^{-1}$. Por lo tanto,

$$X(1/p) = X(z)|_{z=p^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=p^{-1}} = \frac{1}{1 - ap}.$$

Esta expresión tiene un polo en $p = 1/a$. La región de convergencia para $X(z)$ era $|z| > |a|$, y para $X(1/p)$ será $|p^{-1}| > |a|$, que puede escribirse como $|p| < 1/|a| = |1/a|$. El contorno de integración C' , que debe estar contenido dentro de la región de convergencia de $X(1/p)$, y por lo tanto no rodea al polo en $1/a$, como se muestra en la Fig. 8.5. Se tiene entonces que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} X(1/p)p^{-n-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{1}{1 - ap} p^{-n-1} dp,$$

y, por ejemplo, para $n = -1$, resulta

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{1}{1 - ap} p^{+1-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{1}{1 - ap} dp = 0,$$

porque el contorno de integración no encierra ningún polo. Para $n = -2$,

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{1}{1 - ap} p^{+2-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{p}{1 - ap} dp = 0,$$

8.4 El teorema de convolución compleja

En el Capítulo 3 se discutió la propiedad de convolución periódica para las transformadas de Fourier de tiempo discreto (TFTD). Específicamente, la transformada de Fourier de un producto de sucesiones es la convolución periódica de sus transformadas de Fourier. Una generalización de esta propiedad es el teorema de la convolución compleja, que relaciona la transformada \mathcal{Z} del producto de sucesiones con la transformada \mathcal{Z} de cada una de las sucesiones.

Para derivar el teorema de la convolución compleja sea $w[n]$ el producto de dos sucesiones $x[n]$ e $y[n]$,

$$w[n] = x[n]y[n],$$

de modo que

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n}. \quad (8.48)$$

Si $Y(z)$ es la transformada \mathcal{Z} de $y[n]$, se puede escribir

$$y[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} Y(v)v^{n-1}dv,$$

donde C_y es un contorno de integración orientado en sentido antihorario contenido en la región de convergencia de $Y(v)$. Por lo tanto, $W(z)$ resulta

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} Y(v)v^{n-1}dv \right] z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z/v)^{-n} \right]}_{X(z/v)} Y(v)v^{-1}dv$$

que puede escribirse como

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} X(z/v)Y(v)v^{-1}dv \quad (8.49)$$

donde C_2 es un contorno cerrado contenido en la zona común de las regiones de convergencia de $X(z/v)$ y de $Y(v)$. De manera similar, si se reemplaza en (8.48) la sucesión $x[n]$ por su expresión equivalente

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} X(v)v^{n-1}dv,$$

se llega a la expresión

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} X(v)Y(z/v)v^{-1}dv, \quad (8.50)$$

donde en este caso C_x es un contorno de integración contenido en la región de convergencia común a $X(v)$ y a $Y(z/v)$. Para determinar la región de convergencia de $W(z)$ se supone que las regiones de convergencia de $X(z)$ y de $Y(z)$ están dadas por

$$\text{Rd}C_X: r_{dx} < |z| < r_{ix}, \quad \text{Rd}C_Y: r_{dy} < |z| < r_{iy}.$$

Entonces, en la ecuación (8.49) C_Y es un contorno tal que

$$r_{dy} < |v| < r_{iy},$$

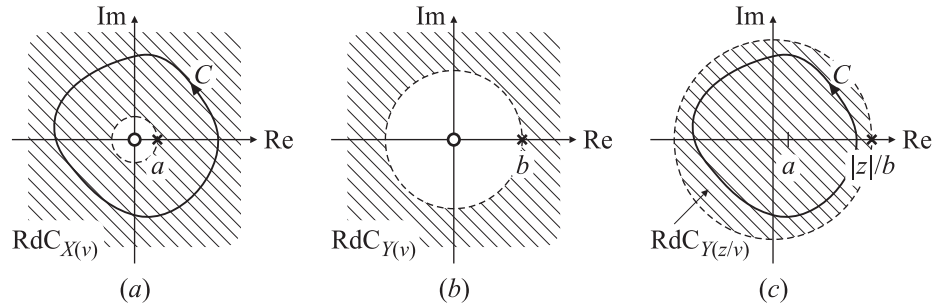


Fig. 8.7: Diagramas de polos y ceros y región de convergencia de $X(v)$ (a), $Y(v)$ (b) e $Y(z/v)$ (c) del Ejemplo 8.19.

y

$$r_{dx} < \left| \frac{z}{v} \right| < r_{ix}.$$

Combinando estas dos expresiones, se encuentra que la región de convergencia de $W(z)$ es

$$r_{dx}r_{dy} < |z| < r_{ix}r_{iy}.$$

Este región de convergencia se suele designar como $\text{RdC}_X \times \text{RdC}_Y$. En algunas ocasiones la región de convergencia puede ser más grande que esta, por la eventual cancelación de polos y ceros, pero siempre incluye la región de convergencia recién definida, y extendiéndose hacia adentro o hacia afuera hasta los polos más cercanos. En otras palabras, la región de convergencia de $W(z)$ *contiene a* $\text{RdC}_X \times \text{RdC}_Y$.

Como es de esperar, las expresiones (8.49) y (8.50) coinciden con las convoluciones periódicas de la transformada de Fourier cuando se toma el círculo unitario como el contorno C_X o C_Y , haciendo $v = e^{j\theta}$ (de manera que $dv = je^{j\theta} d\theta$) y evaluando $W(z)$ sobre el círculo unitario tomando $z = e^{j\omega}$. En estas condiciones, la expresión (8.50) se puede escribir como

$$\begin{aligned} W(z)|_{z=e^{j\omega}} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} X(v)Y(z/v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j\omega}/e^{j\theta})e^{-j\theta}(je^{j\theta}d\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j\omega-\theta})d\theta, \end{aligned}$$

que es la expresión de la convolución periódica estudiada en el Capítulo 2.

Una de las principales dificultades en aplicar el teorema de convolución compleja consiste en determinar cuáles de los polos del integrando quedan dentro y cuáles fuera del contorno de integración. El siguiente ejemplo permite ilustrar el procedimiento.

EJEMPLO 8.19 Aplicación del teorema de convolución compleja

Sean $x[n] = a^n u[n]$ e $y[n] = b^n u[n]$. Es claro que

$$w[n] = x[n]y[n] = a^n u[n]b^n u[n] = (ab)^n u[n],$$

y por lo tanto,

$$W(z) = \frac{1}{1 - (ab)z^{-1}}, \quad \text{para } |z| > |ab|. \quad (8.51)$$

Este mismo resultado puede encontrarse aplicando el teorema de convolución compleja. Las transformadas \mathcal{Z} de $x[n]$ e $y[n]$ son

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|, \quad \text{y} \quad Y(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > |b|,$$

respectivamente. Reemplazando en (8.50) se tiene que

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{1-av^{-1}} \frac{1}{1-b(z/v)^{-1}} v^{-1}dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{(v-a)} \frac{-(z/b)}{(v-z/b)} dv \end{aligned}$$

El integrando (es conveniente destacar que aquí la variable es v y no z) tiene dos polos, uno ubicado en $v = a$ y otro en $v = z/b$. El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia de $X(v)$ se representan en Fig. 8.7(a). Ya que el contorno de integración debe estar dentro de la región de convergencia de $X(v)$, necesariamente encierra el polo en $v = a$. Para determinar si el contorno rodea o no al polo en $v = z/b$, se observa que la región de convergencia de $Y(z)$ es $|z| > |b|$, como se muestra en la Fig. 8.7(b) y por lo tanto, la región de convergencia de $Y(z/v)$ es $|z/v| > |b|$ o $|v| > |z/b|$, como se ilustra en la Fig. 8.7(c). Como el contorno de integración debe estar contenido en la región de convergencia común a $X(v)$ y a $Y(z/v)$, el polo en $v = z/v$ queda *afuera* del contorno C . (En las figura se ha supuesto que a y b son reales para facilitar la representación). Utilizando el teorema de los residuos de Cauchy para evaluar $W(z)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{(v-a)} \frac{-(z/b)}{(v-z/b)} dv = \text{Res} \left\{ \frac{1}{(v-a)} \frac{-(z/b)}{(v-z/b)} \text{ en } v = a \right\} \quad (8.52) \\ &= \frac{-(z/b)}{(a-z/b)} = \frac{1}{1-(ab)z^{-1}}, \end{aligned}$$

que coincide con la expresión calculada en (8.51). Debe notarse que, para que se solapen las regiones de convergencia de $X(v)$ y de $Y(z/v)$, la Fig. 8.7(c) muestra que $|z/b| > |a|$, de donde resulta que $W(z)$ converge donde $|z| > |ab|$.

Nota: El cálculo de residuo en (8.52) sólo tiene en cuenta el polo encerrado por el contorno de integración. Es rutina verificar que si (por error) dentro del contorno de integración se hubiese considerado también el polo en $v = z/b$, la evaluación de la integral hubiese sido nula. \square

8.5 Relación de Parseval

En el Capítulo 2 se estudió la relación de Parseval para la transformada de Fourier. La generalización de esta relación para la transformada \mathcal{Z} es consecuencia directa del teorema de convolución compleja. Dadas dos sucesiones (que se supondrán complejas), $x[n]$ e $y[n]$, la relación de Parseval establece que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}dv, \quad (8.53)$$

donde el contorno de integración debe estar contenido en la zona común entre la región de convergencia de $X(v)$ y la de $Y^*(1/v^*)$. La relación (8.53) se puede obtener definiendo una sucesión auxiliar

$$w[n] = x[n]y^*[n],$$

y notando que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] = W(z)|_{z=1}. \quad (8.54)$$

De la Propiedad 5 de la Tabla 4.2 y el teorema de convolución compleja,

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*(z^*/v^*)v^{-1}dv. \quad (8.55)$$

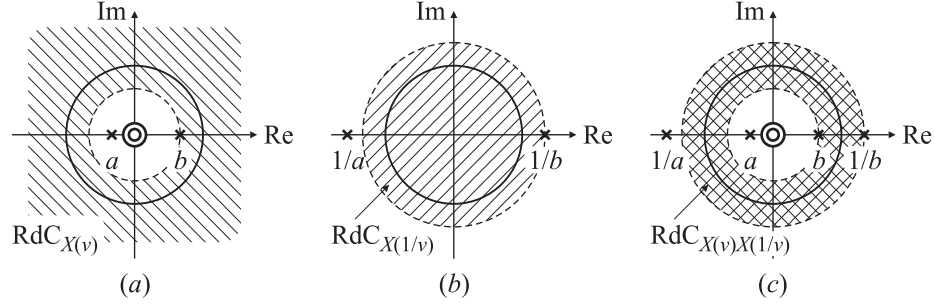


Fig. 8.8: Diagramas de polos y ceros y regiones de convergencia de $X(v)$ (a), $X(1/v)$ (b) y de $X(v)X(1/v)$ (c) (Ejemplo 8.20).

Evaluando (8.55) para $z = 1$ se obtiene (8.53). Debe observarse que para poder aplicar (8.54) la región de convergencia de $W(z)$ debe contener el círculo unitario.

Si tanto $X(z)$ como $Y(z)$ convergen sobre el círculo unitario, se puede elegir $v = e^{j\omega}$, y la ecuación (8.53) se puede escribir como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega, \quad (8.56)$$

que es la relación de Parseval para la transformada de Fourier estudiada en el Capítulo 2.

La relación de Parseval en la forma de la ecuación (8.56) es difícil de evaluar. Por ejemplo, si $X(z)$ e $Y(z)$ son funciones racionales, el integrando de 8.56 será una función complicada de $e^{j\omega}$ aún para sistemas sencillos. Sin embargo, la expresión (8.53) se puede calcular fácilmente aplicando el teorema de los residuos de Cauchy, como se muestra en el Ejemplo 8.20.

Un caso particular de (8.53) es cuando $x[n] = y[n]$, donde $x[n]$ es una sucesión real. En este caso la relación (8.53) toma la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)X(1/v)v^{-1}dv, \quad (8.57)$$

donde C es un contorno cerrado en la región de convergencia de $X(z)$. Como se mencionó más arriba, para que las sumatorias del miembro izquierdo sean finitas, la región de convergencia de $X(z)$ debe contener al círculo unitario.

La expresión (8.57) es una expresión de la energía de una sucesión $x[n]$ en función de su transformada \mathcal{Z} , y se suele aplicar para encontrar la potencia de ruido (debido al redondeo en las operaciones aritméticas) en la salida de filtros digitales. El siguiente ejemplo muestra el uso del teorema de los residuos de Cauchy para evaluar la ecuación (8.57).

EJEMPLO 8.20 Energía de una sucesión en base a la relación de Parseval

Sea $x[n]$ una sucesión derecha con transformada \mathcal{Z}

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})},$$

donde $|a| < |b| < 1$. Entonces, la región de convergencia de $X(z)$ es $|z| > |b|$. Para calcular la integral de contorno en (8.57) es necesario calcular $X(v) = X(z)|_{z=v}$, que está dada por

$$X(v) = \frac{1}{(1 - av^{-1})(1 - bv^{-1})} = \frac{v^2}{(v - a)(v - b)},$$

y cuya región de convergencia es $|v| > |b|$, que tiene un cero doble en el origen y un polo en $v = a$ y otro en $v = b$, como se muestra en la Fig. 8.8(a). También es necesario calcular $X(v^{-1}) = X(z)|_{z=v^{-1}}$,

$$X(v^{-1}) = \frac{1}{(1-av)(1-bv)} = \frac{1}{ab} \frac{1}{(v-1/a)(v-1/b)},$$

que tiene un cero doble en infinito, y polos en $v = 1/a$ y en $v = 1/b$, donde por hipótesis, $1 < 1/|b| < 1/|a|$. La región de convergencia es entonces $|v| < 1/|b|$, que naturalmente se solapa con la región de convergencia de $X(v)$, como se representa en la Fig. 8.8(b). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)X(1/v)v^{-1}dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{v^2}{(v-a)(v-b)} \frac{1}{ab} \frac{1}{(v-1/a)(v-1/b)} v^{-1}dv \end{aligned} \quad (8.58)$$

donde C es un contorno de integración contenido en la intersección de las regiones de convergencia de $X(v)$ y de $X(v^{-1})$, es decir, en el anillo $|b| < |z| < |b|^{-1}$, representado en la Fig. 8.8(c). Para calcular la integral de (8.58) los únicos polos rodeados por la curva C son los polos en $v = a$ y en $v = b$, de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{v^2}{(v-a)(v-b)} \frac{1}{ab} \frac{1}{(v-\frac{1}{a})(v-\frac{1}{b})} v^{-1}dv \\ &= \text{Res} \left\{ \frac{1}{ab} \frac{v}{(v-a)(v-b)(v-\frac{1}{a})(v-\frac{1}{b})} \text{ en } z = a \right\} + \\ &\quad \text{Res} \left\{ \frac{1}{ab} \frac{v}{(v-a)(v-b)(v-\frac{1}{a})(v-\frac{1}{b})} \text{ en } z = b \right\} \\ &= \frac{1}{ab} \frac{a}{(a-b)(a-\frac{1}{a})(a-\frac{1}{b})} + \frac{1}{ab} \frac{b}{(b-a)(b-\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b})} = \frac{1+ab}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)}. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Este resultado también puede obtenerse en el dominio temporal. La transformada $X(z)$ también puede escribirse como

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{1}{1-b/a} \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-a/b} \frac{1}{1-bz^{-1}} \\ &= \frac{-a}{b-a} \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{b}{b-a} \frac{1}{1-bz^{-1}}, \end{aligned}$$

de modo que

$$x[n] = \frac{-a}{b-a} a^n u[n] + \frac{b}{b-a} b^n u[n].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2[n] &= \left(\frac{-a}{b-a} a^n u[n] + \frac{b}{b-a} b^n u[n] \right)^2 \\ &= \left(\frac{a^2}{(b-a)^2} a^{2n} - \frac{2ab}{(b-a)^2} a^n b^n + \frac{b^2}{(b-a)^2} b^{2n} \right) u[n], \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{(b-a)^2} a^{2n} - \frac{2ab}{(b-a)^2} a^n b^n + \frac{b^2}{(b-a)^2} b^{2n} \right) \\ &= \frac{a^2}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n - \frac{2ab}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n + \frac{b^2}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (b^2)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2}{(b-a)^2} \frac{1}{1-a^2} - \frac{2ab}{(b-a)^2} \frac{1}{1-ab} + \frac{b^2}{(b-a)^2} \frac{1}{1-b^2} \\ &= \frac{1+ab}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)} \end{aligned} \tag{8.60}$$

resultado que, naturalmente, coincide con (8.59). En este ejemplo la dificultad de calcular la energía en el dominio temporal o transformado es más o menos equivalente; sin embargo, para sistemas de mayor orden, la complejidad del cálculo en el dominio temporal crece con el orden, mientras que el desarrollo de los cálculos en el dominio transformado se limitan a calcular más residuos. \square

8.6 Referencias

Churchill, R. V., Brown, J. W. *Variable compleja y aplicaciones*, 5ta. ed., McGraw-Hill, Madrid, 1992.

Mathews J. H., Howell, R. W., *The complex analysis project*,
<http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/ComplexPowerSeriesMod.html>

8.7 Tabla de transformadas \mathcal{Z}

	sucesión	transformada	RdC
1.	$\delta[n]$	1	todo el plano z
2.	$\delta[n - m]$	z^{-m}	todo z salvo 0 (si $m > 0$) o ∞ (si $m < 0$)
3.	$a^n(u[n] - u[n - N])$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$
4.	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
5.	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6.	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
7.	$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
8.	$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
9.	$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
10.	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11.	$\text{sen}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\text{sen } \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
12.	$\text{sen}(\omega_0 n + \phi) u[n]$	$\frac{\text{sen } \phi + \text{sen}(\omega_0 - \phi) z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
13.	$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
14.	$r^n \text{sen}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \text{sen } \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
15.	$\cosh(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cosh \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cosh \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
16.	$\text{senh}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\text{senh } \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cosh \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$

	sucesión	transformada	RdC
17.	$\frac{1}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$ z > 1$
18.	$\frac{1-a^n}{n}u[n]$	$\ln\left(\frac{a^{-1}-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)$	$ z > 1$
19.	$\frac{\cos(\omega_0 n)}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}}\right)$	$ z > 1$
20.	$\frac{(-1)^n \cos(\omega_0 n)}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}}\right)$	$ z > 1$
21.	$\frac{\text{sen}(\omega_0 n)}{n}u[n]$	$\omega_0 + \arctan\left(\frac{\text{sen}\omega_0 z^{-1}}{1-\cos\omega_0 z^{-1}}\right)$	$ z > 1$
22.	$\frac{(-1)^n \text{sen}(\omega_0 n)}{n}u[n]$	$\omega_0 + \arctan\left(\frac{\text{sen}\omega_0 z^{-1}}{1+\cos\omega_0 z^{-1}}\right)$	$ z > 1$
23.	$\frac{\cos(\omega_0 n)}{n!}u[n]$	$e^{\cos\omega_0 z^{-1}} \cos(\text{sen}\omega_0 z^{-1})$	$ z > 1$
24.	$\frac{\text{sen}(\omega_0 n)}{n!}u[n]$	$e^{\cos\omega_0 z^{-1}} \text{sen}(\text{sen}\omega_0 z^{-1})$	$ z > 1$
25.	$\left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m}\right)u[n+1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} \ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$ z > 1$
26.	$\left(\sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}\right)u[n]$	$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} e^{z^{-1}}$	$ z > 1$
27.	$\frac{1+(-1)^n}{2} a^n u[n]$	$\frac{1}{1-a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
28.	$\frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$	$\frac{\pi}{2} + \arctan(z^{-1})$	$ z > 1$
29.	$a^n \cos(\pi n)u[n]$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$	$ z > a $
30.	$a^n \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$	$\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$	$ z > a $

8.7.1 Transformadas de sucesiones $n^r a^n u[n]$ o $-n^r a^n u[n]$

	sucesión	transformada
1.	$\left. \begin{array}{l} na^n u[n], \quad z > a \\ -na^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
2.	$\left. \begin{array}{l} n^2 a^n u[n], \quad z > a \\ -n^2 a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^3} (1+az^{-1})$
3.	$\left. \begin{array}{l} n^3 a^n u[n], \quad z > a \\ -n^3 a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^4} (1+4az^{-1}+a^2z^{-2})$
4.	$\left. \begin{array}{l} n^4 a^n u[n], \quad z > a \\ -n^4 a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^5} (1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})$
5.	$\left. \begin{array}{l} n^5 a^n u[n], \quad z > a \\ -n^5 a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^6} (1+26az^{-1}+66a^2z^{-2}+26a^3z^{-3}+a^4z^{-4})$
6.	$\left. \begin{array}{l} n^6 a^n u[n], \quad z > a \\ -n^6 a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^7} (1+57az^{-1}+302a^2z^{-2}+302a^3z^{-3}+57a^4z^{-4}+a^5z^{-5})$
7.	$\left. \begin{array}{l} n^7 a^n u[n], \quad z > a \\ -n^7 a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^8} (1+120az^{-1}+1191a^2z^{-2}+2416a^3z^{-3}+1191a^4z^{-4}+120a^5z^{-5}+a^6z^{-6})$
8.	$\left. \begin{array}{l} n^8 a^n u[n], \quad z > a \\ -n^8 a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^9} (1+247az^{-1}+4293a^2z^{-2}+15619a^3z^{-3}+15619a^4z^{-4}+4293a^5z^{-5}+247a^6z^{-6}+a^7z^{-7})$
9.	$\left. \begin{array}{l} n^9 a^n u[n], \quad z > a \\ -n^9 a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{10}} (1+502az^{-1}+14608a^2z^{-2}+88234a^3z^{-3}+156190a^4z^{-4}+88234a^5z^{-5}+14608a^6z^{-6}+502a^7z^{-7}+a^8z^{-8})$
10.	$\left. \begin{array}{l} n^{10} a^n u[n], \quad z > a \\ -n^{10} a^n u[-n-1], \quad z < a \end{array} \right\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{11}} (1+1013az^{-1}+47840a^2z^{-2}+455192a^3z^{-3}+1310354a^4z^{-4}+1310354a^5z^{-5}+455192a^6z^{-6}+47840a^7z^{-7}+1013a^8z^{-8}+a^9z^{-9})$

8.7.2 Transformadas inversas de polos múltiples

transformada	RdC	sucesión
1. $\frac{1}{(1 - az^{-1})}$	$ z > a $	$a^n u[n]$
2.	$ z < a $	$-a^n u[-n - 1]$
3. $\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $	$(n+1) a^n u[n]$
4.	$ z < a $	$-(n+1) a^n u[-n - 1]$
5. $\frac{1}{(1 - az^{-1})^3}$	$ z > a $	$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) a^n u[n]$
6.	$ z < a $	$-\frac{1}{2}(n+1)(n+2) a^n u[-n - 1]$
7. $\frac{1}{(1 - az^{-1})^4}$	$ z > a $	$-\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) a^n u[n]$
8.	$ z < a $	$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) a^n u[-n - 1]$
9. $\frac{1}{(1 - az^{-1})^N}$	$ z > a $	$\frac{1}{(N-1)!}(n+1)(n+2) \cdots (n+N-1) a^n u[n]$
10.	$ z < a $	$-\frac{1}{(N-1)!}(n+1)(n+2) \cdots (n+N-1) a^n u[-n - 1]$

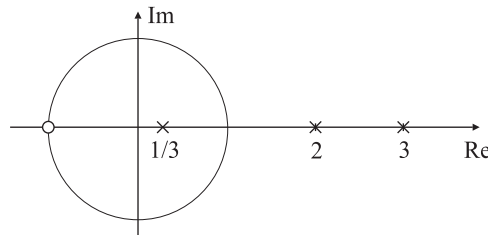
8.8 Ejercicios

Ejercicio 1 Calcule la transformada \mathcal{Z} y la región de convergencia de cada una de las siguientes sucesiones, usando la definición.

1. $(1/2)^n u[n]$.
2. $(1/2)^n (u[n] - u[n - 10])$.
3. $-(1/2)^n u[-n - 1]$.
4. $\delta[n + 1]$.
5. $(1/2)^n u[-n]$.
6. $a^n u[n] + b^n u[-n - 1]$.

Ejercicio 2 Si los polos y ceros de $X(z)$ están distribuidos como se muestra en la figura,

1. Especifique la región de convergencia de $X(z)$ si se sabe que existe la transformada de Fourier. Para este caso, determine si la sucesión es derecha, izquierda o bilátera.
2. ¿Cuántas sucesiones biláteras se pueden asociar al diagrama de polos y ceros?
3. ¿Es posible que la gráfica de polos y ceros esté asociada a una sucesión que sea estable y causal? En caso afirmativo, indique cuál es la región de convergencia.



Ejercicio 3 Calcule la transformada \mathcal{Z} de las siguientes señales aplicando propiedades. Resuelva también el inciso (3) aplicando la definición, y compare las regiones de convergencia que se obtienen en cada caso.

1. $x[n] = [3(2^n) - 4(3^n)] u[n]$.
2. $x[n] = (a^n \cos \omega_0 n) u[n]$.
3. $x[n] = u[n] - u[n - N]$.
4. $x[n] = u[-n]$.
5. $x[n] = n a^n u[n]$.

Ejercicio 4 Encuentre la transformada \mathcal{Z} inversa de las siguientes funciones, empleando el método de la serie de potencias o la expansión en fracciones parciales.

1. $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$.
2. $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$.
3. $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$.
4. $X(z) = \frac{1 - a z^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > \frac{1}{a}$.

Ejercicio 5 Demuestre que si $X(z)$ es la transformada \mathcal{Z} de $x[n]$, entonces:

1. $z^{n_0} X(z) \leftrightarrow x[n + n_0]$.
2. $X(a^{-1}z) \leftrightarrow a^n x[n]$.
3. $-zX'(z) \leftrightarrow n x[n]$.

Ejercicio 6 Si $x[n]$ es una sucesión causal ($x[n] = 0$ si $n < 0$), y $x[0] \neq 0$, demuestre que:

1. $X(z)$ no tienen polos ni ceros en $z = \infty$: el $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ es no nulo y finito.
2. hay el mismo número de polos y de ceros en el plano \mathcal{Z} (excluido $z = \infty$).

Ejercicio 7 Especifique las regiones de convergencia de las siguientes funciones, y calcule todas las transformadas \mathcal{Z} inversas posibles.

1. $X(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$.
2. $X(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+3)}$.

Ejercicio 8 Calcule la transformada \mathcal{Z} inversa de las siguientes funciones, aplicando los métodos sugeridos.

1. $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$, (división larga, $x[n]$ es una sucesión derecha.)

2. $X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}$, (fracciones parciales, $x[n]$ es estable.)

3. $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{4}$, (división larga.)

4. $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$, $|z| < \frac{1}{4}$, (división larga.)

5. $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$, $|z| > \frac{1}{2}$, (por tablas.)

Ejercicio 9 Resuelva las siguientes transformadas \mathcal{Z} inversas.

1. $X(z) = \frac{3z^{-3}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}$, $x[n]$ es izquierda.
3. $X(z) = \text{sen}(z)$.

2. $X(z) = \log(1 + az^{-1})$, $|z| > |a|$.
4. $X(z) = \frac{z^7 - 2}{1 - z^{-7}}$, $|z| > 1$.

Ejercicio 10 Para cada una de las siguientes sucesiones, calcule la transformada \mathcal{Z} y la región de convergencia. Esboce el diagrama de polos y ceros.

1. $x[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n - 1]$, $|a| < |b| < |c|$.
2. $x[n] = n^2 a^n u[n]$.
3. $x[n] = e^{n^4} (\cos \frac{\pi}{12} n) u[n] - e^{n^4} (\cos \frac{\pi}{12} n) u[n - 1]$.

Ejercicio 11 Determine cuál de las siguientes transformadas \mathcal{Z} no corresponde a una sucesión causal.

$$1. \quad X(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^4}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^3} \quad 2. \quad X(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad 3. \quad X(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^3}$$

Ejercicio 12 Dentro de un reactor nuclear interactúan dos tipos de partículas. Cada segundo, una partícula α se divide en ocho partículas β , y una partícula β se divide en una partícula α y dos partículas β .

1. Verifique que en el n -ésimo instante de tiempo el número de partículas es

$$\begin{aligned} \alpha[n] &= \beta[n-1], \\ \beta[n] &= 2\beta[n-1] + 8\beta[n-2] + 8\delta[n-1], \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

2. Si en el tiempo inicial $t = 0$ hay en el reactor una única partícula α , ¿cuántas partículas α y cuántas partículas β hay en $t = 100$?

Ejercicio 13 Un préstamo de $p = 100000$ \$ se debe amortizar en 360 cuotas mensuales de c pesos. El interés, acumulado mensualmente, se computa a razón de $\rho = 10\%$ por año sobre el saldo deudor: por ejemplo, después del primer mes (y justo antes del primer pago), la deuda total es $y[1] = 100000 + \frac{0.10}{12}100000$.

1. Verifique que el balance en el n -ésimo mes es

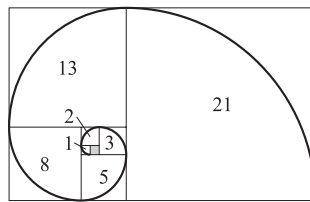
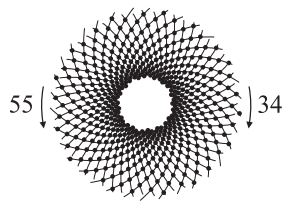
$$y[n] = (1 + \beta)y[n-1] - cy[n-1] + p\delta[n], \quad n \geq 1.$$

2. Calcule el monto p de la cuota de manera de cancelar la deuda en 30 años, dejando un balance neto nulo.

Ejercicio 14 La sucesión de Fibonacci generalizada satisface la ecuación a diferencias

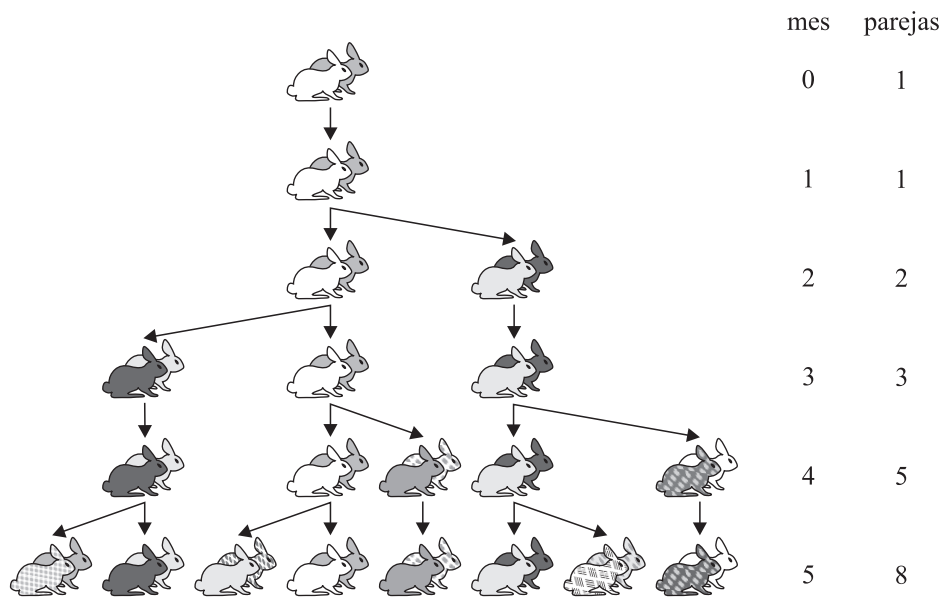
$$x[n+2] = x[n+1] + x[n], \quad n \geq 0,$$

es decir, que el valor actual es la suma de los dos valores previos. La sucesión clásica se cita por vez primera en el *Liber abaci*, publicado en 1202 por el comerciante y matemático italiano Leonardo de Pisa, o Fibonacci (*figlio dei Bonacci*), y se obtiene cuando las condiciones iniciales son $x[0] = 0$ y $x[1] = 1$. Esta sucesión aparece en un sinnúmero de problemas aparentemente no relacionados, como la impedancia de entrada de una red resistiva en escalera, la separación de los brotes en las ramas de los árboles, el número de pétalos de las flores (las lilas tienen 3, los ranúnculos 5, las caléndulas 13, los ásteres 21, y la mayoría de las margaritas 34, 55, u 89; las semillas de girasol están dispuestas sobre dos familias de espirales entrelazadas, 34 en sentido horario y 55 en sentido antihorario, como se muestra en la figura, aunque según la familia pueden ser 34 y 55, 55 y 89 u 89 y 144), etc. La espiral equiangular, formada por cuartos de círculos cuyos radios crecen según la serie de Fibonacci reproduce el aspecto de los caracoles.

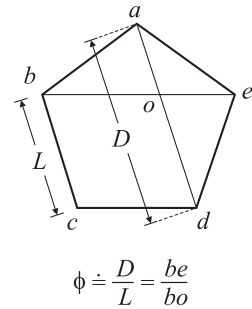
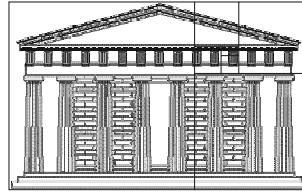
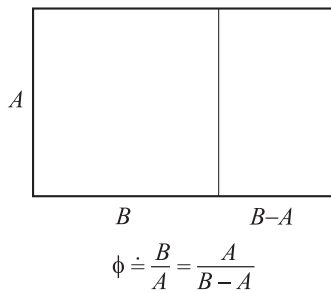


Sin duda el ejemplo más conocido, aunque más inexacto, es el cálculo del número total de parejas de conejos en un determinado número de meses, sabiendo que cada pareja pare una nueva pareja cada mes, que la pareja nueva puede tener descendencia a partir de los dos meses de edad, y que ningún conejo muere. De esta forma,

- Al finalizar el primer mes, la pareja se aparea (pero todavía no tiene descendencia).
- Al fin del segundo mes, la hembra parió una nueva pareja, de modo que hay dos parejas.
- Al final del tercer mes, la primera hembra tiene otra camada, de modo que hay 3 parejas.
- Al finalizar el cuarto mes, la primera hembra tiene su segunda cría, y la segunda tiene su primera descendencia, totalizando 5 parejas.
- etc.



1. Encuentre una expresión en forma cerrada para $x[n]$.
2. Demuestre que la relación $x[n]/x[n + 1]$ tiende al límite $\phi = 2/(1 + \sqrt{5})$ cuando $n \rightarrow \infty$. Este número se conoce como *sección dorada*, *divina proporción*, o *proporción áurea* y según los griegos era la relación entre los lados del rectángulo de aspecto más agradable (la altura, ancho y largo del Partenon siguen esta proporción). La figura muestra otras construcciones geométricas donde aparece la sección dorada: en un pentágono regular, el cociente entre la longitud de las diagonales y los lados, o el cociente entre los segmentos en que se forman en una diagonal al ser cortada por otra es igual a ϕ . Se verifica que $1/\phi = \phi - 1$. (La elección de ϕ -phi- como nombre de esta constante es en homenaje a Fidias, escultor y arquitecto griego)



3. Muestre que la sucesión de Fibonacci satisface las siguientes propiedades:

- (a) $(x[n])^2 + (x[n+1])^2 = x[2n+1]$.
 (b) $(x[n+2])^2 - (x[n+1])^2 = x[n]x[n+3]$.

Referencias:

La Fibonacci Association (<http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/>) fue fundada en California en 1962 para incentivar el interés en los números de Fibonacci y tópicos relacionados, y publica desde 1963 *The Fibonacci Quarterly*. Otros artículos de interés sobre los números de Fibonacci y la sección áurea son:

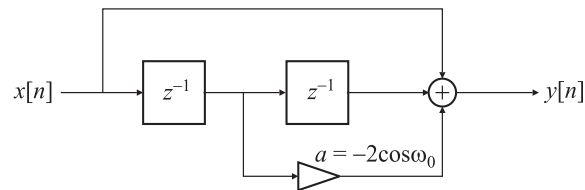
1. Bubnicki, Z., "Input Impedance and Transfer Function of a Ladder Network," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 10, No. 2, Jun 1963, pp. 286-287.
2. Hill Jr., F., "Gentle diversions: Phi—A precious jewel," *IEEE Communications Magazine*, Vol. 16, No. 5, Sep 1978, pp.35-37.
3. Mack, D. R., "The magical Fibonacci number," *IEEE Potentials*, Vol. 9, No. 3, Oct 1990, pp. 34-35.
4. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Daisy, Daisy, give me your answer, do", *Scientific American*, Vol. 272, No. 1, January 1995, pp. 76-79.
5. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Fibonacci Forgeries", *Scientific American*, Vol. 272, No. 5, May 1995, pp. 82-85.
6. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Tales of a neglected number", *Scientific American*, Vol. 274, No. 6, June 1996, pp. 92-93.



8.9 Análisis de sistemas LIT en el campo transformado

Ejercicio 1 Para el filtro digital de la figura,

1. Determine la relación entrada/salida y la respuesta impulsiva $h[n]$.
2. Calcule y grafique la magnitud $|H(e^{j\omega})|$ y la fase $\angle H(e^{j\omega})$ del filtro, y encuentre qué frecuencias son completamente bloqueadas por el filtro.
3. Cuando $\omega_0 = \pi/2$, calcule la salida $y[n]$ si $x[n] = \cos(\pi/3n + \pi/6)$, $-\infty < n < \infty$.



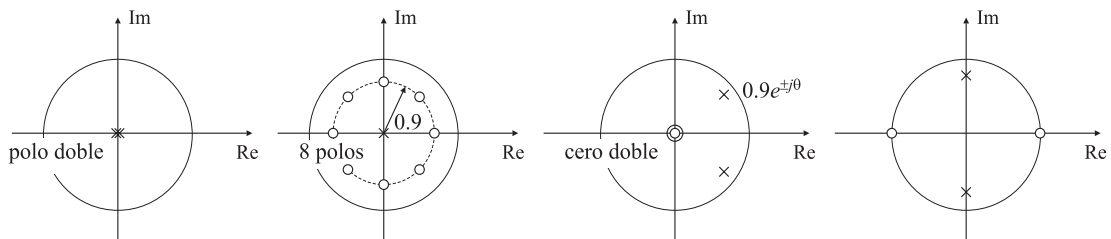
Ejercicio 2 Para el sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n] = (1/4)^n \cos(\pi n/4) u[n]$,

1. Calcule la función de sistema $H(z)$.
2. ¿Es posible implementar este sistema utilizando un número finito de multiplicadores y retardos unitarios? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo lo haría?
3. Esboce la respuesta en frecuencia $|H(e^{j\omega})|$ en base al diagrama de polos y ceros.
4. Calcule la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = (1/4)^n u[n]$.

Ejercicio 3 Para el sistema descrito por la ecuación a diferencias $y[n] = (1/2)y[n-1] + x[n] + (1/2)x[n-1]$,

1. Determine la respuesta impulsiva.
2. Calcule la respuesta en frecuencia.
3. Calcule la salida si la entrada es $x[n] = \cos(\pi/2n + \pi/4)$.

Ejercicio 4 Esboce aproximadamente la magnitud de la respuesta $|X(e^{j\omega})|$ de los siguientes diagramas de polos y ceros.



Ejercicio 5 La función de sistema de un filtro de primer orden es

$$H(z) = \frac{1 + a z^{-1}}{1 - a z^{-1}}, \quad a, k \text{ reales.}$$

1. ¿Para qué rango de valores de a el filtro es un pasabajos estable?. Esboce $|H(e^{j\omega})|$.
2. Calcule k para que la ganancia del filtro sea unitaria en $\omega = 0$.
3. Compute la respuesta impulsiva $h[n]$ del filtro.
4. Determine el rango de valores de a en el cual el filtro es un *pasaltos* estable.

Ejercicio 6 El filtro con ecuación a diferencias $y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$ se llama *filtro promediador*, porque su salida es el promedio de las M muestras anteriores de la entrada. La función de sistema (para $M = 9$) es:

$$H(z) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}z^{-1} + \dots + \frac{1}{9}z^{-8}.$$

1. Calcule y grafique la respuesta al escalón del sistema.
2. Calcule la respuesta en frecuencia (magnitud y fase).
3. Si la frecuencia de muestreo es $f_s = 1$ kHz, determine las frecuencias (analógicas) de las señales que serán bloqueadas por el filtro.

Ejercicio 7 La ecuación diferencial de un diferenciador analógico es $y(t) = dx(t)/dt$, donde $x(t)$ es la señal de entrada e $y(t)$ la señal de salida.

1. Determine la respuesta en frecuencia $H_c(j\Omega)$.
2. El diferenciador discreto ideal se define como $H(e^{j\omega}) = j\omega$, $|\omega| \leq \pi$. Justifique esta definición comparando las respuestas en frecuencia $|H(e^{j\omega})|$ y $\angle H(e^{j\omega})$ con las del inciso anterior.
3. Muestre que el sistema discreto $y[n] = x[n] - x[n-1]$ es una buena aproximación al diferenciador del inciso 2, al menos para bajas frecuencias.
4. Calcule la respuesta del sistema del inciso 3 a una entrada $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta)$, $-\infty < n < \infty$, para ω_0 pequeño.

Ejercicio 8 Un SLIT causal está definido por la ecuación a diferencias

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1].$$

1. Determine la función de sistema $H(z) = Y(z)/X(z)$. Dibuje los polos y ceros de $H(z)$ indicando la región de convergencia.
2. Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema.
3. Si el sistema es inestable, encuentre una respuesta al impulso estable (no causal) que satisfaga la ecuación a diferencias.

Ejercicio 9 La función de sistema de un SLIT causal es

$$X(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{ real.}$$

1. Determine para qué valores de a el sistema es estable.
2. Si $0 < a < 1$, dibuje el diagrama de polos y ceros. Indique la región de convergencia.
3. Demuestre que el sistema es un pasatodo (el módulo de la respuesta en frecuencia $|H(e^{j\omega})|$ es constante para todo ω).

Ejercicio 10 Si el sistema $y[n] = 0.2y[n-1] + x[n] - 0.3x[n-1] + 0.02x[n-2]$ y el sistema $y[n] = x[n] - 0.1x[n-1]$ se excitan con la misma señal de entrada, se obtiene una salida idéntica en ambos casos. ¿Es posible? ¿Por qué?

Ejercicio 11 Cuando la entrada a un sistema lineal e invariante en el tiempo es $x[n] = (1/2)^n u[n] + (2)^n u[-n-1]$, la salida es $y[n] = 6(1/2)^n u[n] - 6(3/4)^n u[n]$.

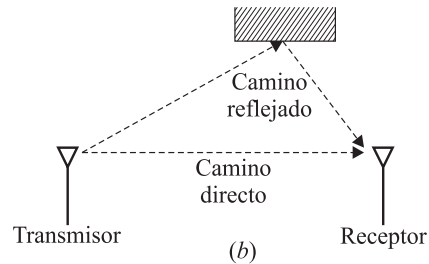
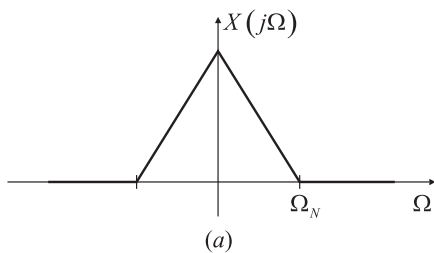
1. Encuentre la función de sistema $H(z)$. Grafique los polos y los ceros de $H(z)$ e indique la región de convergencia.
2. Calcule la respuesta impulsiva del sistema $h[n]$.
3. Escriba la ecuación a diferencias que caracteriza el sistema.
4. Determine si el sistema es
 - (a) estable;
 - (b) causal.

I **Ejercicio 12** Una sucesión $x[n]$ tiene transformada- z $X(z) = P(z)/Q(z)$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios en z . Si $x[n]$ es absolutamente sumable, y si todas las raíces de $Q(z)$ están dentro del círculo unidad, ¿puede afirmar que $x[n]$ es causal?. Si la respuesta es afirmativa, explique detalladamente. Si la respuesta es negativa, dé un contraejemplo.

Ejercicio 13 Un transmisor emite una señal $x(t)$ con espectro $X(j\Omega)$ como se muestra en la Fig. (a). Debido a los rebotes en el camino de propagación, el receptor recibe una señal $y(t) = x(t) + \alpha x(t - T_R)$, con $\alpha < 1$ [Fig. (b)]. En el receptor esta señal se muestrea cada $T = T_R/N$ segundos, $y[n] = y(nT)$.

1. Calcule el espectro $Y(j\Omega)$ de la señal $y(t)$ en función del espectro de la señal $X(j\Omega)$.
2. Dibuje el espectro $Y(e^{j\omega})$ de $y[n]$, indicando las escalas de amplitud y tiempo.
3. Calcule $H(z) = Y(z)/X(z)$, y dibuje el diagrama de polos y ceros.
4. Calcule *analíticamente* la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y exprésela de la forma más sencilla posible.

5. Dibuje el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia, indicando los puntos singulares de los diagramas.
6. Determine y justifique si el sistema es
 - (a) causal;
 - (b) estable;
 - (c) invariante en el tiempo.
7. Calcule la función de sistema de un compensador $G(z)$, un sistema que conectado a la salida del receptor permita recuperar $x[n]$. Note que $H(z)G(z) = 1$.
8. Encuentre todas las respuestas impulsivas $g[n]$ tales que $y[n] = h[n] * g[n] = x[n]$.
9. Para las respuestas impulsivas del inciso anterior demuestre –evaluando explícitamente la convolución– que si $x[n] = \delta[n]$, entonces $y[n] = \delta[n]$.
10. Especifique la región de convergencia de $G(z)$ según los resultados del inciso (6).
11. Determine (justificando su respuesta) si el sistema $G(z)$ es
 - (a) causal;
 - (b) estable.
12. Este método de compensación, ¿puede aplicarse en un sistema real? ¿Por qué?



Ejercicio 14 Para cada una de las siguientes funciones de sistema, determine y justifique si corresponden o no a sistemas de mínima fase.

$$(a) \quad H_1(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})},$$

$$(b) \quad H_2(z) = \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{2}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}z^{-1})},$$

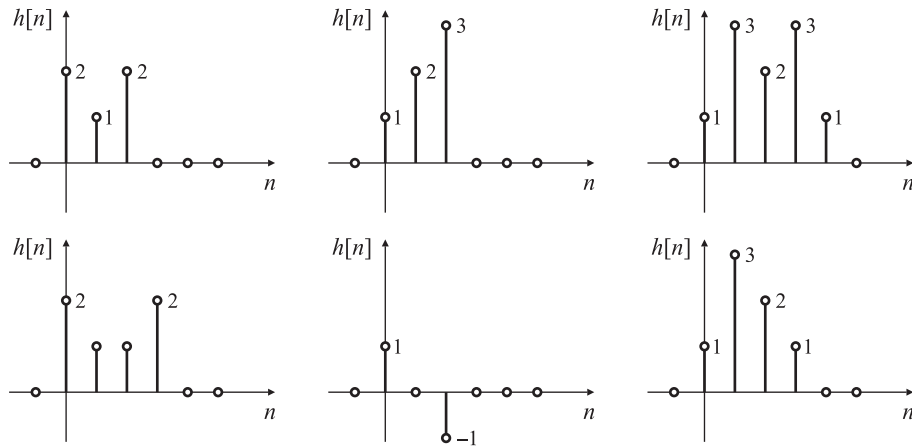
$$(c) \quad H_3(z) = \frac{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})},$$

$$(d) \quad H_4(z) = \frac{z^{-1}(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})}.$$

Ejercicio 15 Un filtro de fase lineal es aquel cuya respuesta en frecuencia puede expresarse como $H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j\omega\alpha}$, donde $A(\omega)$ es una función real y no negativa de ω , y α es una constante real.

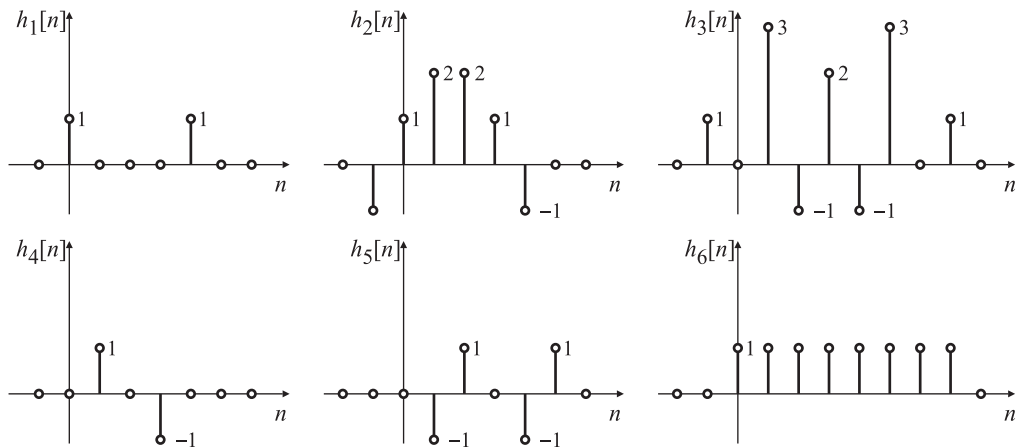
1. Determine si cada una de las respuestas impulsivas de la figura corresponden a sistemas de fase lineal generalizada. Si la respuesta es afirmativa, calcule $A(\omega)$, α y β .

2. Para los filtros con fase lineal generalizada determine si cumplen con la condición más exigente de ser de fase lineal.



I Ejercicio 16 ¿Es posible que un filtro FIR de fase mínima tenga respuesta de fase lineal generalizada? Dé un ejemplo en caso afirmativo, y justifique en caso contrario.

Ejercicio 17 Para las respuestas impulsivas de la figura correspondientes a sistemas de fase lineal generalizada, encuentre el retardo de grupo asociado con cada sistema.



I Ejercicio 18 Una señal $x[n]$ con transformada $X(z)$ es tal que:

1. $x[n]$ es real, y de fase mínima.
2. $x[n]$ es nula fuera del intervalo $0 \leq n \leq 4$.
3. $X(z)$ tiene un cero en $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ y un cero en $z = \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}$.

En base a esta información, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Es $X(z)$ una función racional? Justifique.
2. Grafique el diagrama de polos y ceros de $X(z)$ y especifique su región de convergencia.

3. Si $x[n] * y[n] = \delta[n]$, e $y[n]$ es una sucesión derecha, dibuje el diagrama de polos y ceros de $Y(z)$ y determine su región de convergencia

Ejercicio 19 Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ son sistemas con fase lineal generalizada. Determine si las siguientes combinaciones de dichos sistemas son sistemas de fase lineal generalizada:

1. $G_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$
2. $G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})$
3. $G_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\theta}) H_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$

Ejercicio 20 La función de sistema de un SLIT causal es

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 4z^{-1})}{(1 - 0.64z^{-2})}$$

1. Encuentre expresiones para un sistema de mínima fase $H_1(z)$ y un sistema pasatodos $H_{pt}(z)$ tal que $H(z) = H_1(z)H_{pt}(z)$.
2. Derive expresiones para un sistema de fase mínima $H_2(z)$, distinto de $H_1(z)$ y un sistema FIR de fase lineal generalizada $H_{lin}(z)$ tal que $H(z) = H_2(z)H_{lin}(z)$.

Ejercicio 21 Para el SLIT con función de sistema

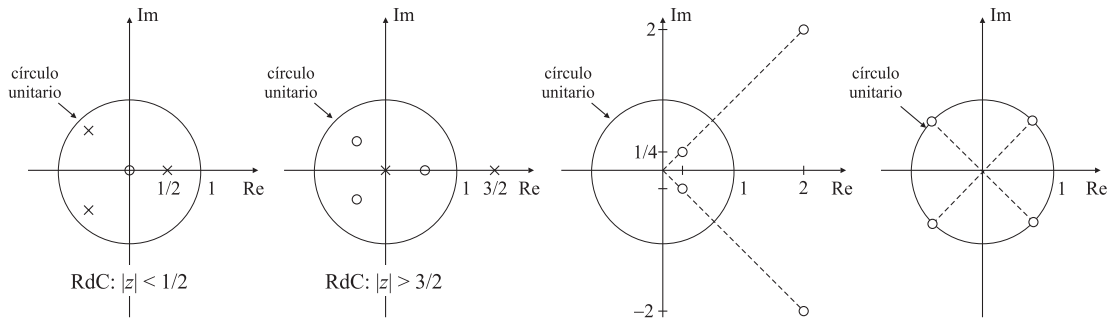
$$H(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi} z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi} z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi} z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi} z^{-1}).$$

1. Encuentre todas las funciones de sistema causales que tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia que $H(z)$, y cuya respuesta impulsiva es real y de la misma longitud que la respuesta impulsiva $h[n]$ de $H(z)$ (son cuatro). Identifique cuál de esos sistemas es de mínima fase.
2. Calcule las respuestas impulsivas de cada una de las funciones de sistema halladas en el inciso previo.
3. Para cada una de las respuestas del inciso anterior, calcule y grafique la *energía parcial* $E[n] = \sum_{m=0}^n (h[m])^2$, para $0 \leq n \leq 5$. Indique qué gráfica corresponde al sistema de mínima fase.

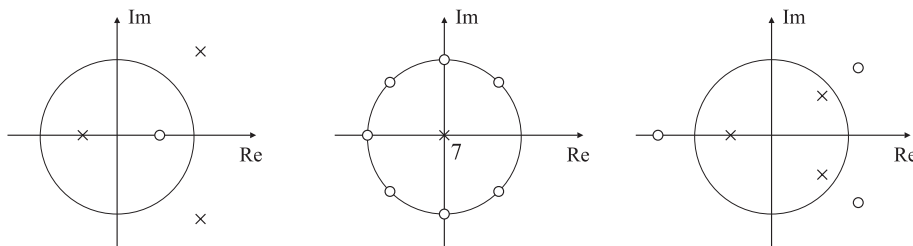
Ejercicio 22 Cada uno de los diagramas de polos y ceros de la figura, junto con la especificación de la región de convergencia, describen un sistema lineal e invariante en el tiempo con función de sistema $H(z)$. Responda si los siguientes postulados son verdaderos o no.

1. El sistema tiene fase nula.
2. El sistema tiene fase lineal generalizada.

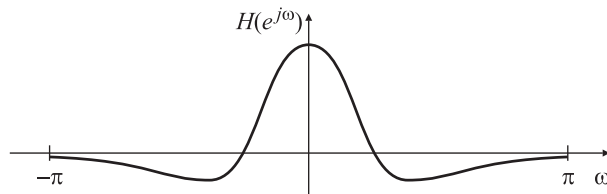
3. El sistema tiene una inversa $H_i(z)$ estable.



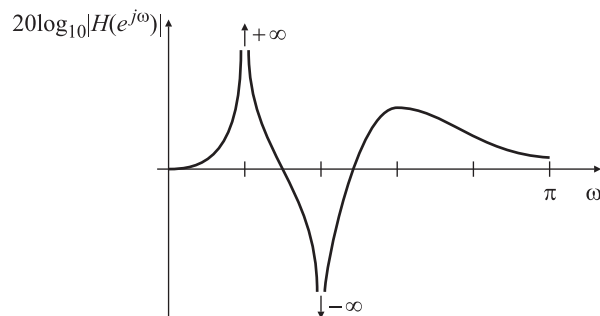
Ejercicio 23 La figura muestra el diagrama de polos y ceros de tres SLIT causales con respuestas impulsivas $h[n]$ reales. Determine si cada uno de ellos satisface las siguientes propiedades: estable, FIR, IIR, fase mínima, pasatodos, fase lineal generalizada, retardo de grupo positivo para todo ω .



I **Ejercicio 24** Un SLIT estable tiene la transformada de Fourier con parte imaginaria nula que se muestra en la figura. ¿El sistema puede tener una inversa estable?



I **Ejercicio 25** Un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo con función de sistema $H(z)$ y respuesta impulsiva real, tiene la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ que se muestra en la figura.



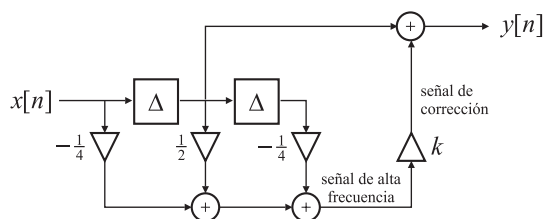
1. Dibuje el diagrama de polos y ceros de $H(z)$, mostrando toda la información posible acerca de la ubicación de los polos y los ceros que puede inferirse a partir de la figura.
2. El sistema ¿es FIR o IIR? Justifique.
3. El sistema ¿tiene fase lineal? ¿Por qué?
4. ¿El sistema es estable? Justifique.

Ejercicio 26 Si $h[n]$ y $H(z)$ son la respuesta impulsiva y la función de sistema de un SLIT estable tipo pasatodos, y $h_i[n]$ la respuesta impulsiva del sistema inverso (también LIT y estable), muestre que $h_i[n] = h[-n]$. Suponga que $h[n]$ es real.

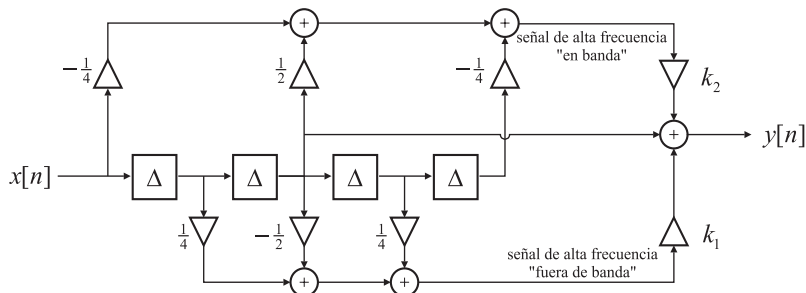
Ejercicio 27 ¿Es cierto que un sistema no puede tener fase lineal generalizada si la función de sistema $H(z)$ tiene polos en cualquier lugar del plano z excepto en $z = 0$ o en $z = \infty$? Justifique si la respuesta es verdadera, y dé un contraejemplo si es falsa.

Ejercicio 28 Determine la función de sistema $H(z)$ de un filtro pasatodos que posea fase lineal generalizada.

Ejercicio 29 El filtro FIR de la figura compensa las pérdidas de alta frecuencia en receptores de TV (*corrección de apertura*). Se conectan en cascada dos de estos circuitos, uno para corregir la apertura horizontal y otro para corregir la apertura vertical. En el primer caso el retardo Δ es la duración de una línea, mientras que en el segundo es de 70 ns (según el estándar CCIR). La ganancia k permite ajustar la cantidad de corrección. Calcule la función transferencia y grafique el módulo de la respuesta en frecuencia para diferentes valores de k .



Ejercicio 30 La figura muestra un circuito mejorado de corrección de apertura. El retardo es de 70 ns (estándar CCIR) y las dos ganancias $k_1 > 0$ y $k_2 < 0$ permiten ajustar la cantidad de corrección. Determine la función de sistema de este circuito y grafique el módulo de la respuesta en frecuencia para diferentes valores de k_1 y k_2 .



Ejercicio 31 En muchas aplicaciones es necesario recuperar una señal que ha sido distorsionada por un proceso de convolución. Este fenómeno puede modelarse como un filtrado lineal, donde la señal deseada $x[n]$ es “distorsionada” por un filtro con respuesta impulsiva $h[n]$, dando lugar a la señal “corrupta” $y[n]$. Suponga que $h[n] = 1$ para $0 \leq n \leq M - 1$, y que vale cero para cualquier otro valor de n .



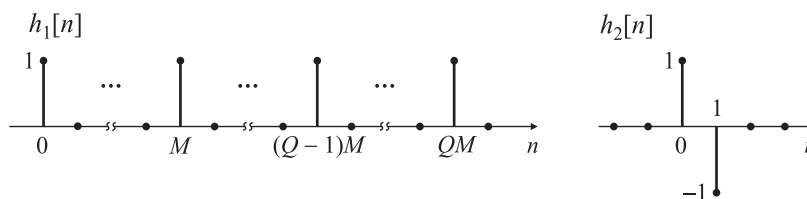
1. Una manera de recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$ es usando un *filtro inverso*: la señal $y[n]$ se filtra por un sistema cuya respuesta en frecuencia es $H_i(e^{j\omega}) = [H(e^{j\omega})]^{-1}$, donde $H(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $h[n]$. Para la respuesta impulsiva especificada, discuta los problemas que presenta la implementación del filtro inverso.
2. Debido a las dificultades del filtrado inverso, una solución habitual es procesar la señal corrupta $y[n]$ con el sistema que muestra la figura, cuya salida $w[n]$ permite extraer una réplica mejorada de $x[n]$.



Las respuestas impulsivas de los sistemas son

$$h_1[n] = \sum_{k=0}^Q \delta[n - kM], \quad h_2[n] = \delta[n] - \delta[n - 1].$$

Explique en detalle el funcionamiento de este sistema, y en particular, en qué condiciones se puede recuperar *exactamente* $x[n]$ de $w[n]$. **Ayuda:** considere la respuesta impulsiva del sistema completo (desde $x[n]$ a $w[n]$).



Este procesamiento se utiliza para restaurar imágenes “movidas” (*blurred* en inglés) –por ejemplo, las fotografías tomadas desde un automóvil que se desplaza con cierta velocidad, o las fotografías de la corteza terrestre tomadas por los satélites– y se conoce como *deblurring*.

Ejercicio 32 No es posible diseñar un compensador perfecto (un sistema inverso causal y estable) para un sistema de *no mínima fase*. Una forma de compensar la *magnitud* de la respuesta en frecuencia se estudia en este problema. El sistema SLIT estable de no mínima fase con función de sistema racional $H(z)$ se conecta en cascada con un sistema compensador $H_c(z)$. La función de sistema $G(z)$ de la cascada es $G(z) = H(z)H_c(z)$.

1. ¿Cómo debe elegirse $H_c(z)$ para que sea estable y causal y tal que $|G(e^{j\omega})| = 1$? (Recuerde que $H(z)$ siempre puede representarse como $H(z) = H_{pt}(z)H_{\min}(z)$.)

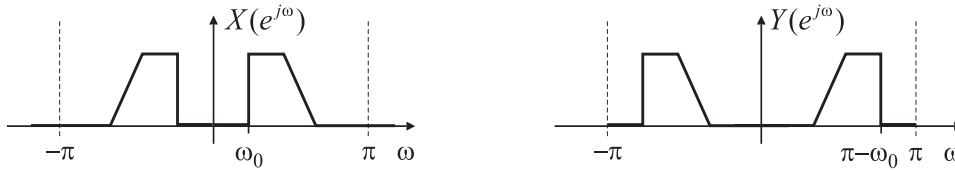
2. Caracterice las funciones de sistema $H_c(z)$ y $G(z)$.

3. Suponga que

$$H(z) = (1 - 0.8e^{j0.3\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.3\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{j0.7\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{-j0.7\pi}z^{-1}).$$

Encuentre $H_{\min}(z)$, $H_{pt}(z)$, $H_c(z)$ y $G(z)$ para este caso, y grafique los diagramas de polos y ceros de cada función de sistema.

Ejercicio 33 Los *inversores de frecuencia* han sido utilizados durante mucho tiempo como una manera sencilla de enmascarar la voz, ya que una señal vocal se vuelve casi ininteligible si su espectro se invierte, tal como se ve en la figura.



1. Determine cómo se puede efectuar la inversión de frecuencia en el dominio tiempo. **Nota:** las operaciones requeridas son muy sencillas, y se pueden efectuar fácilmente en tiempo real.
2. Diseñe un desenmascarador.
3. Usando las funciones de sonido de MATLAB, pruebe a leer un archivo *.WAV cualquiera, enmascárelo, y reproduzca.

Ⓜ Ejercicio 34 Ecos y reverberaciones

Se puede generar una señal $y[n]$ formada por ecos y reverberaciones “sintéticos” de una señal $x[n]$ sumando réplicas retardadas y escaladas de la misma

$$y[n] = \sum_{i=1}^{\infty} g_i x[n - iD], \quad (8.61)$$

donde D es un entero positivo, y $|g_k| > |g_{k+1}|$.

1. Muestre que el filtro “peine”

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-D}}$$

puede ser utilizado como un reverberador, calculando la respuesta al impulso, y comparándola con la respuesta impulsiva del sistema (8.61).

2. Para construir reverberadores digitales se colocan en cascada de tres a cinco filtros “peine” pasatodo, cuya función transferencia es

$$H(z) = \frac{z^{-D} - a}{1 - az^{-D}},$$

eligiendo adecuadamente los parámetros a y D . Calcule (con MATLAB, utilizando la función `impz`) y grafique la respuesta impulsiva de dos de tales reverberadores, obtenido cada uno de ellos al colocar en cascada tres secciones con los siguientes parámetros:

Reverberador "A"			Reverberador "B"		
Sección	D	a	Sección	D	a
1	50	0.70000	1	37	0.70000
2	40	0.66500	2	17	0.77000
3	32	0.63175	3	11	0.84700

3. Grafique la función transferencia (módulo y fase) de los reverberadores "A" y "B" utilizando el comando `freqz`, y comente sobre ellas.
4. Analice la respuesta impulsiva $h[n]$ de los reverberadores en los dos casos que se detallan a continuación.
 - (a) los retardos D_1 , D_2 y D_3 no son primos (similar al caso del Reverberador "A");
 - (b) los retardos D_1 , D_2 y D_3 son números primos (como en el Reverberador "B").
5. La diferencia entre el eco y la reverberación es que con el eco se producen repeticiones claras de la señal a intervalos de tiempo uniformes. La reverberación, en cambio, puede pensarse como un sinfín de ecos de diferente duración interactuando entre sí. ¿Cuál de los prototipos es mejor reverberador?

Más detalles acerca de esta aplicación pueden encontrarse en J. A. Moorer, "Signal processing aspects of computer music: a survey", *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, No. 8, Agosto de 1977, pp. 1108-1137.